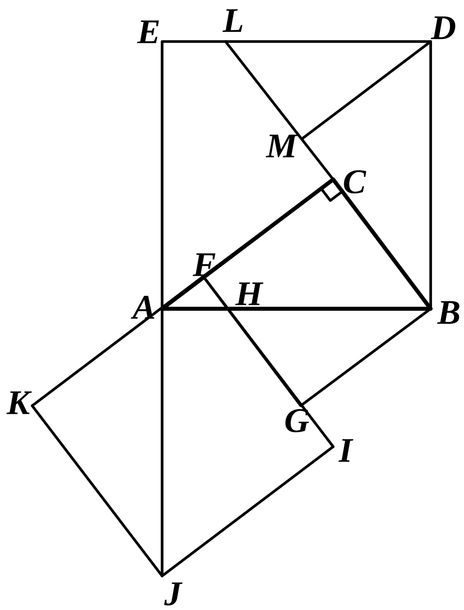
勾股定理證明-G189

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCFG$，且$\overline{FG}$交$\overline{AB}$於H。
2. 延長$\overline{FG}$至I點滿足$\overline{FI}=\overline{AC}$，且$\overline{FI}$交$\overline{AB}$於$H$點。
3. 以$\overline{FI}$為邊作一正方形$FIJK$，連接$\overline{AJ}$。
4. 延長$\overline{BC}$交$\overline{DE}$於L點。
5. 從D點作$\overline{DM}$垂直$\overline{BL}$。



【求證過程】

作圖過程將正方形$ABDE$分割為五個部分，利用圖形間的全等與共用關係可將這五個部分的面積組合成另外兩個正方形面積的和，得到正方形$ABDE$與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 透過三角形ABC證明三角形JAK全等於三角形BDM：

因為$\angle JKA=90°=\angle ACB$，$\overline{AK}=\overline{BC}$，$\overline{JK}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta JAK \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)};$$

因為$\angle DBM+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以$\angle DBM=\angle BAC$，因為$\overline{BD}=\overline{AB}$，

$\angle BMD = 90° = \angle ACB$, 及前述 $\angle DBM = \angle BAC$, 所以

$$\Delta BDM \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

可推得

$$\Delta JAK \cong \Delta BDM .$$

2. 證明三角形 BHG 全等於三角形 DLM ：

   因為 $\overline{BG} // \overline{DM}$, $\overline{BH} // \overline{DL}$, 所以 $\angle HBG = \angle LDM$, 因為 $\angle BGH = 90° = \angle LMD$,

   $\overline{BG} = \overline{BC} = \overline{DM}$ 及前述 $\angle HBG = \angle LDM$ ，所以

$$\Delta BHG \cong \Delta DLM \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 說明四邊形 $ACLE$ 與 $JIHA$ 全等：

   因為四邊形 $ACLE$ 的內角皆與四邊形 $AJIH$ 的四個內角相等，且因為 $\overline{AE} = \overline{AB} = \overline{AJ}$,

   $\overline{AC} = \overline{IJ}$ 對應邊相等，所以可推得

$$\text{四邊形 } ACLE \cong \text{四邊形 } JIHA$$

4. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割，運用前述圖形關係將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：
   由圖形及前述第 1, 2, 3 點可得

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDM + \Delta DLM + ACLE \\
&= \Delta AFH + BCFH + \Delta JAK + \Delta BHG + JIHA \\
&= (\Delta AFH + \Delta JAK + JIHA) + (BCFH + \Delta BHG) \\
&= \square FIJK + \square BCFG \ ,
\end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE = \square FIJK + \square BCFG .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$, 正方形 $FIJK$ 邊長為 $\overline{AC}$, 所以由第 4 點結論可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

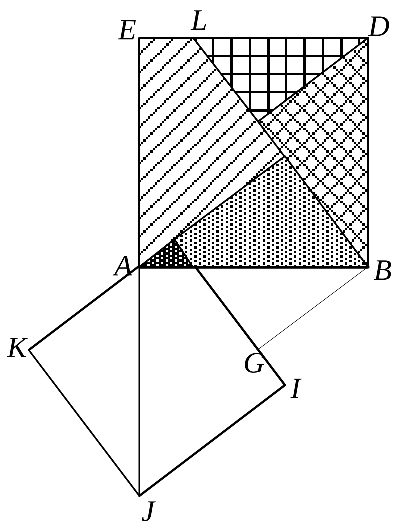
   即

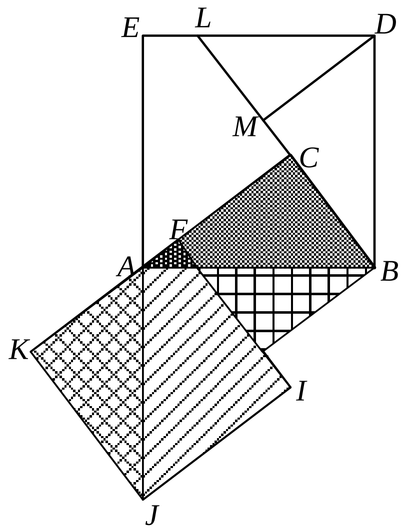
$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：以及根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1938 年 2 月 27 日所提供的。

2. 心得：此證明的圖形切割方式與 G188 不同，但切割出來的圖形是相同的，同樣可形的全等關係，以拼圖方式來體會勾股定理的意義。至於證明對學生而言可能較繁瑣，因此不適合用在教學。拼圖方式如下：





3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	