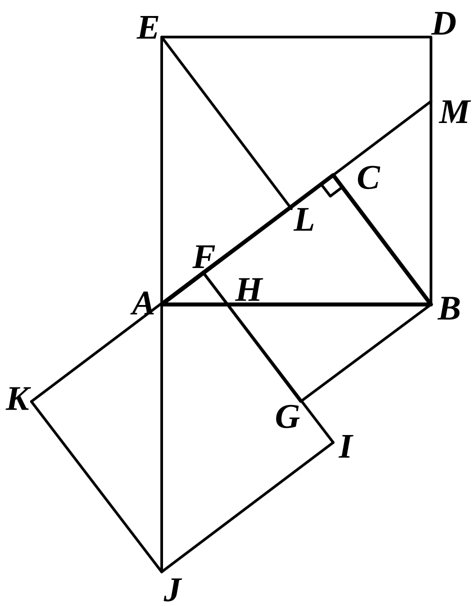
勾股定理證明-G188

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCFG$，且$\overline{FG}$交$\overline{AB}$於H點。
2. 延長$\overline{FG}$至I點使$\overline{FI}=\overline{AC}$，以$\overline{FI}$為邊作一正方形$FIJK$。
3. 延長$\overline{FC}$交$\overline{BD}$於M點。
4. 從E點作$\overline{EL}$垂直$\overline{AM}$。



【求證過程】

作圖過程將正方形$ABDE$分割為五個部分，利用圖形間的全等與共用關係，可將這五個部分的面積組合成另外兩個正方形面積的和，得到正方形$ABDE$與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明三角形BHG全等於三角形BMC：

   因為$\angle MBC+\angle ABC=90°=\angle HBG+\angle ABC$，所以$\angle MBC=\angle HBG$，因為$\overline{BC}=\overline{BG}$，$\angle BCM=\angle BGH$，及前述$\angle MBC=\angle HBG$所以可得

   $$\Delta BHG\cong\Delta BMC \text{(ASA 全等)}.$$

2. 證明三角形EAL全等於三角形ABC，再證明三角形EAL全等於三角形JAK：
   因為$\angle EAL+\angle BAC=90°=\angle ABC+\angle BAC$，所以$\angle EAL=\angle ABC$，因為$\angle EAL=\angle ABC$，及$\angle ELA=90°=\angle ACB$，$\overline{AE}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta EAL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

推得 $\overline{EL} = \overline{AC}$;

因為 $\angle EAL = \angle JAK$, $\angle ALE = \angle AKJ$, $\overline{EL} = \overline{AC} = \overline{JK}$, 所以

$$\Delta EAL \cong \Delta JAK \text{ (AAS 全等)}.$$

3. 說明四邊形 $DELM$ 全等於四邊形 $AJIH$ ：
   因為 $\angle DML = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - \angle BHC = \angle AHI$, $\angle EDM = 90^\circ = \angle JAH$, $\angle ELM = 90^\circ = \angle JIH$, 所以可知四邊形 $DELM$ 的內角皆與四邊形 $AJIH$ 的四個內角相等，且因為 $\overline{EL} = \overline{AC} = \overline{JI}$, $\overline{DE} = \overline{AB} = \overline{AJ}$ 對應邊相等，所以可推得

$$\text{四邊形 } DELM \cong \text{四邊形 } AJIH.$$

4. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割五區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：由圖形及前述第 1, 2, 3 點可得

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BMC + DELM + \Delta EAL \\
&= \Delta AHF + BCFH + \Delta BMC + DELM + \Delta EAL \\
&= \Delta AHF + BCFH + \Delta BHG + AJIH + \Delta JAK \\
&= (BCFH + \Delta BHG) + (AJIH + \Delta JAK + \Delta AHF) \\
&= \square BCFG + \square FIJK ,
\end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square FIJK .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $FIJK$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 4 點結論可得

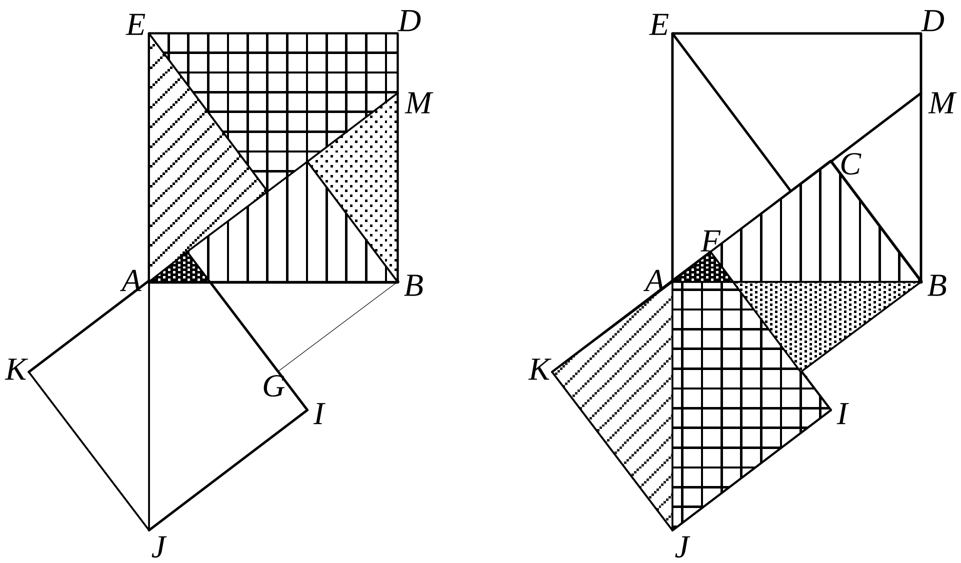
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 6*(3), 34.
2. 心得：此證明的分割後區塊形狀與 G177 相同，同樣若欲在教學中使用，可讓學生運用全等圖形之間的拼湊，以拼圖方式讓學生作體驗。拼圖方式如下：



3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	