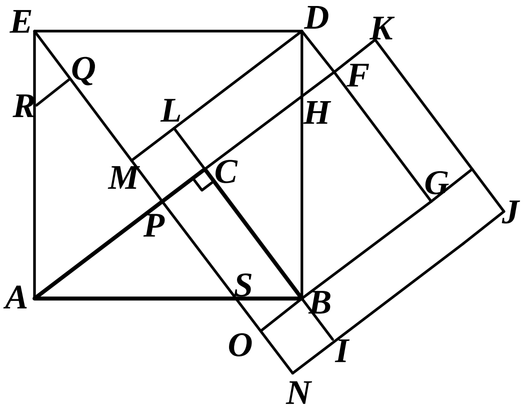
勾股定理證明-G187

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCFG$，且 $\overline{CF}$ 交 $\overline{BD}$ 於 H，延長 $\overline{GF}$ 至 D 點（於證明過程第 1 點說明 $D-G-F$ 三點共線）。
2. 延長 $\overline{BC}$ 至 I 點滿足 $\overline{CI}=\overline{AC}$，並以 $\overline{CI}$ 為邊作一正方形 $CIJK$。
3. 延長 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BL}=\overline{AC}$，連接 $\overline{DL}$。
4. 從 L 點作 $\overline{LM}$ 垂直 $\overline{IL}$，且 $\overline{LM}=\overline{BI}$（於證明過程第 2 點說明 $D-L-M$ 三點共線）。
5. 從 M 點作 $\overline{MN}$ 平行 $\overline{LI}$，從 B 點作 $\overline{BO}$ 垂直 $\overline{MN}$，且 $\overline{MN}$ 交 $\overline{AC}$ 於 P 點，交 $\overline{AB}$ 於 S 點。
6. 連接 $\overline{EM}$（於證明過程第點說明 $E-M-P$ 三點共線），在 $\overline{EM}$ 上取一點 Q 使 $\overline{EQ}=\overline{DF}$，從 Q 點作 $\overline{QR}$ 平行 $\overline{FH}$。



【求證過程】

作圖過程將正方形 $ABDE$ 分割為 8 個部分，利用圖形間的全等與共用關係可將這四個部分的面積組合成另外兩個正方形面積的和，得到正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 運用三角形的全等關係及平行線判別性質說明 $D-G-F$ 三點共線：

   因為 $\angle ABC+\angle DBC=90°=\angle DBG+\angle DBC$，所以 $\angle DBG=\angle ABC$，因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$，

   $\overline{BG}=\overline{BC}$，及前述 $\angle DBG=\angle ABC$，所以可得

   $$\Delta DBG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等})$$

   由此可知 $\angle BDG=\angle BAC=\angle DBC$，推得 $\overline{DG}\,//\,\overline{BC}$ (內錯角相等)，進一步得 $\overline{DG}\,//\,\overline{GF}$，

因此 $D-G-F$ 三點共線。

2. 運用平行四邊形的性質說明 $D-L-M$ 三點共線：

由第 1 點可知 $\overline{BC}//\overline{DG}$，因為 $\overline{CL}$ 為 $\overline{BC}$ 的延長，所以 $\overline{BL}//\overline{DG}$，且因為 $\overline{DG}=\overline{AC}$，

$\overline{BL}=\overline{AC}$，即 $\overline{DG}=\overline{BL}$，及 $\overline{BL}//\overline{DG}$，$\angle DGB=90°$，所以可知四邊形 $BGDL$ 為一矩形，

因此 $\angle DLB=90°$，可推得 $D-L-M$ 三點共線。

3. 說明四邊形 $DGOM$ 為正方形且邊長為 $\overline{AC}$ ：

因為 $\overline{BL}=\overline{CI}$ ，所以 $\overline{CL}=\overline{BI}$，由作圖過程中的 $\overline{LM}=\overline{BI}$，及 $\overline{MN}$ 平行 $\overline{LI}$ 可推得四邊形

$CLMP$ 及 $BION$ 為兩個邊長相等的正方形，且其邊長為 $\overline{CI}-\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{BC}$.

四邊形 $DGOM$ 中，因為兩組對邊分別平行及內角為直角，所以可知其為矩形，且因

為 $\overline{GO}=\overline{GB}+\overline{BO}=\overline{BC}+(\overline{AC}-\overline{BC})=\overline{AC}=\overline{DG}$，所以

四邊形 $DGOM$ 為正方形且邊長為 $\overline{AC}$.

4. 證明三角形 DEM 全等於三角形 DBG ：

因為 $\angle EDM+\angle MDB=90°=\angle BDG+\angle MDB$，所以 $\angle EDM=\angle BDG=\angle BAC$，因為

$\overline{ED}=\overline{AB}$，$\angle EDM=\angle BAC$，$\overline{DM}=\overline{AC}$ 所以

$$\Delta DEM\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)}$$

且由第 1 點中 $\Delta DBG\cong\Delta ABC$ 可推得

$$\Delta DEM\cong\Delta DBG.$$

5. 證明三角形 ASP 全等於三角形 BHC ：

因為 $\overline{MN}//\overline{LI}$，所以 $\angle APS=\angle ACB=90°$，可推得 $\angle APS=\angle BCH$；因為 $\angle HBC+\angle CBA$

$=90°=\angle BAC+\angle CBA$，所以 $\angle HBC=\angle BAC=\angle SAP$；因為 $\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\overline{CI}-\overline{BI}=\overline{BC}$，

及前述 $\angle APS=\angle BCH$，$\angle SAP=\angle HBC$，所以可得

$$\Delta ASP\cong\Delta BHC \text{ (ASA 全等).}$$

6. 證明三角形 BSO 全等於三角形 DHF ，及三角形 EQR 全等於三角形 DHF ：

因為 $\overline{DM}//\overline{FP}$，所以 $\overline{DF}=\overline{CL}=\overline{BO}$，即 $\overline{DF}=\overline{BO}$；因為 $\angle DHF=\angle BHC=\angle ABC$，且 $\overline{BC}$

$//\overline{PO}$，所以 $\angle BSO=\angle ABC=\angle DHF$，因為前述 $\overline{BO}=\overline{DF}$，$\angle BSO=\angle DHF$，及

$\angle BOS=90°=\angle DFH$，所以可推得

$$\Delta BSO\cong\Delta DHF \text{ (AAS 全等)；}$$

因為 $\overline{EQ} // \overline{DF}$， $\overline{EA} // \overline{DB}$, 所以 $\angle REQ = \angle HDF$ ；因為 $\overline{QR} // \overline{FH}$， $\overline{EQ} // \overline{DF}$, 所以

$\angle RQE = \angle HFD$, 因為 $\overline{EQ} = \overline{DF}$ 及前述 $\angle REQ = \angle HDF$， $\angle RQE = \angle HFD$, 所以

$$\Delta ERQ \cong \Delta DHF \text{ (ASA 全等)},$$

可進一步推得

$$\Delta ERQ \cong \Delta DHF \cong \Delta BSO .$$

7. 由三角形的全等關係及圖形，說明四邊形 $APQR$ 全等於四邊形 $BGFH$ ：

因為 $\angle EAP + \angle CAB = 90° = \angle ABC + \angle CAB$, 所以 $\angle EAP = \angle ABC = \angle DBG$, 因為 $\overline{AE} = \overline{BD}$,

$\overline{AP} = \overline{BC} = \overline{BG}$, 及前述 $\angle EAP = \angle DBG$, 所以可得

$$\Delta EAP \cong \Delta DBG \text{ (SAS 全等)},$$

由前述結合圖形及第 6 點 $\Delta ERQ \cong \Delta DHF$ 可推得

$$APQR \cong BGFH .$$

8. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割八區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：
由圖形及前述第 4, 5, 6, 7 點可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ASP + BSML + CHDL + \Delta BHC + \Delta DEM + APQR + \Delta ERQ \\ &= \Delta BHC + BSML + CHDL + \Delta BHC + \Delta DBG + BGFH + \Delta DHF \\ &= (\Delta BHC + BGFH) + (BSML + CHDL + \Delta BHC + \Delta DBG + \Delta BSO) \\ &= \square BCFG + \square DGOM \quad ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square DGOM .$$

9. 整理第 8 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $BCGF$ 邊長為 $\overline{BC}$, 正方形 $DGOM$ 邊長為 $\overline{AC}$,

所以由第 8 點結論得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1920 年 12 月 3 日所證明出來，並在 1938 年 2 月 28 日提供。
2. 心得：此證明圖形較複雜，可能較難引起學生的學習興趣，且因為此證明圖形有重疊部分且拼湊較不直觀，所以較不適合讓學生以拼圖方式體會勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				