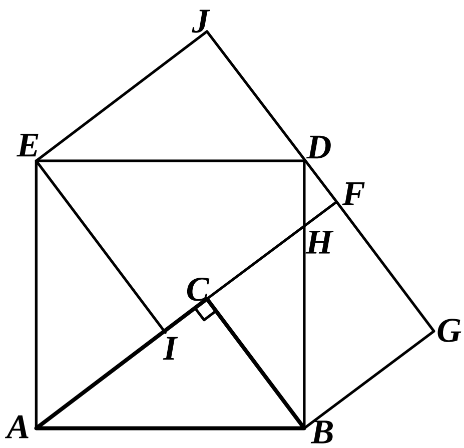
勾股定理證明-G186

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCFG$，且交 $\overline{BD}$ 於 H 點。
2. 以 F 為頂點在 $\overline{AF}$ 上作 $\overline{FI}=\overline{AC}$，連接 $\overline{EI}$，作三角形 EDJ 全等於三角形 ABC，連接 $\overline{DF}$，形成正方形 $FIEJ$ （於證明過程第 2 點說明）。



【求證過程】

作圖過程將正方形 $ABDE$ 分割為四個部分，利用圖形間的全等與共用關係可將這四個部分的面積組合成另外兩個正方形面積的和，得到正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 先說明 $D-F-G$ 三點共線，再說明 $J-D-F$ 三點共線，可得四邊形 $FIEJ$ 為矩形：

   因為 $\angle DBC+\angle ABC=90^\circ=\angle DBC+\angle DBG$，所以 $\angle DBG=\angle ABC$，因為 $\overline{BG}=\overline{BC}$，

   $\overline{BD}=\overline{AB}$ 及前述 $\angle DBG=\angle ABC$，所以

   $$\Delta DBG\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

   由此可知 $\angle BGD=90^\circ=\angle BGF$，推得 $D-F-G$ 三點共線，因為 $\angle FDH+\angle BDE+\angle EDJ=\angle GDB+90^\circ+\angle EDJ=\angle JED+\angle DJE+\angle EDJ=180^\circ$，所以推得

   $$J-D-F\text{ 三點共線},$$

   因為 $\angle FAB=\angle CAB=\angle JED$，且 $\overline{ED}//\overline{AB}$，所以 $\overline{FI}//\overline{EJ}$，再由 $\overline{FI}=\overline{AC}=\overline{EJ}$ 可知四邊形 $FIEJ$ 為平行四邊形，且因為 $\angle EJD=90^\circ$ 及 $J-D-F$ 三點共線，所以可得

   四邊形 $FIEJ$ 為一矩形。

2. 證明三角形 EAI 全等於三角形 ABC，並由對應邊關係推得四邊形 $FIEJ$ 為正方形：

   因為 $\angle JED+\angle DEI=90^\circ=\angle AEI+\angle DEI$，所以 $\angle AEI=\angle JED$，且因為 $\Delta EDI\cong\Delta ABC$，

所以推得 $\angle AEI = \angle BAC$；因為 $\angle EAC + \angle CAB = 90° = \angle ABC + \angle CAB$，所以 $\angle EAI = \angle ABC$，因為前述 $\angle AEI = \angle BAC$，$\angle EAI = \angle ABC$ 且 $\overline{AE} = \overline{AB}$，所以可得

$$\Delta EAI \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)},$$

因為由上述可推得 $\overline{EI} = \overline{AC} = \overline{EJ}$，且由第 1 點得知四邊形 $FIEJ$ 為一矩形，所以

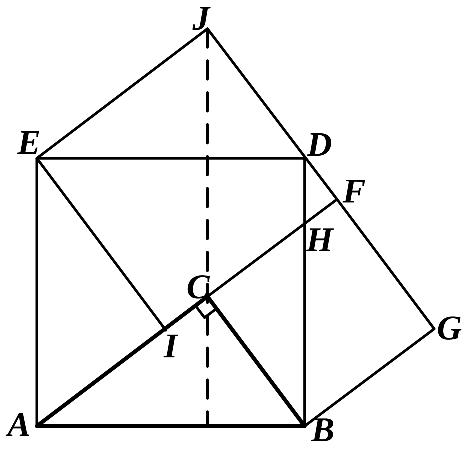
四邊形 $FIEJ$ 為正方形。

3. 說明三角形 EAI 全等於三角形 DBG：
   結合前述第 1 點及第 2 點中的 $\Delta DBG \cong \Delta ABC$ 及 $\Delta EAI \cong \Delta ABC$，可推得
   $$\Delta EAI \cong \Delta DBG.$$
4. 由前述證明及圖形的分割及拼湊，可得正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係：
   $$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BCH + DEIH + \Delta EAI\\ &= \Delta EDJ + \Delta BCH + DEIH + \Delta DBG\\ &= \Delta EDJ + DEIF + \Delta BCH + \Delta DHF + BGFH\\ &= (\Delta EDJ + DEIF + \Delta DHF) + (\Delta BCH + BGFH)\\ &= \square BCFG + \square FIEJ \quad ,\end{aligned}$$
   即
   $$\square ABDE = \square BCFG + \square FIEJ.$$
5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：
   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $FIEJ$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 4 點結論可得
   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$
   即
   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

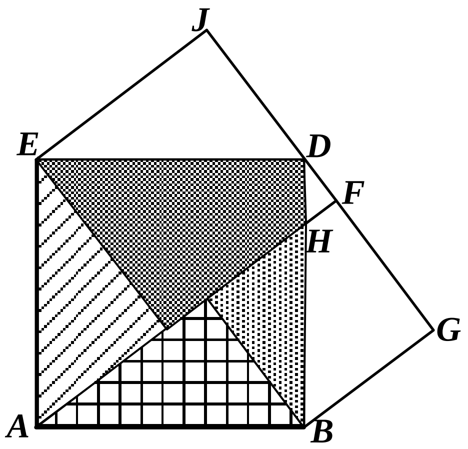
【註與心得】

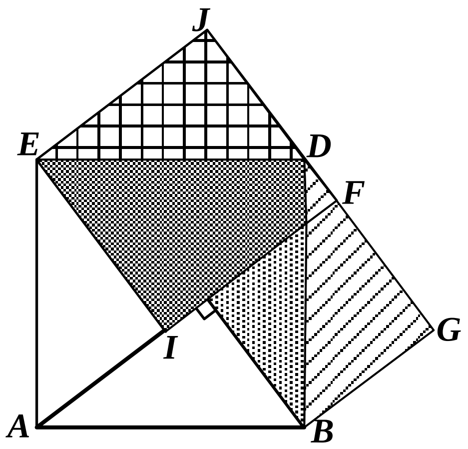
1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   George Bruce Halsted(1895). The Elements of Geometry(p.78). New York: John Wiley & Sons.
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*. New York : Macmillan and co.
2. 心得：此證明圖形分割較不複雜，學生應能嘗試運用圖形的全等以拼圖體會勾股定理，另外證明過程也不複雜，可讓學生當成進階題作練習；此圖形與 G165 完全相同，差別在於一開始在作圖時正方形一個往內作，一個往外作，導致

證明過程的差異；此證明圖形若再作一條鉛垂輔助線，則可以運用圖形之間等底同高的面積關係作證明，形成另一種證明方式，即



另外，原圖形拼圖方式如下：





3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●