勾股定理證明-G180

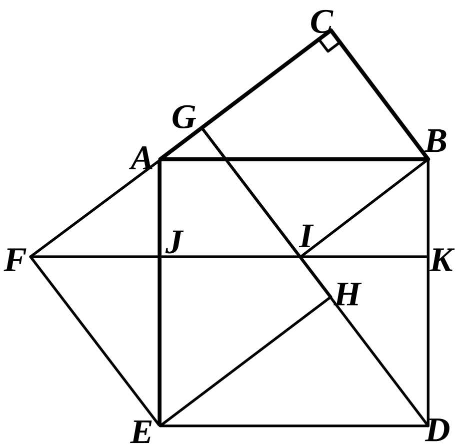
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ 。

2. 以 $\overline{AE}$ 為斜邊，作直角三角形 EAF 全等於直角三角形 ABC ，接著以 $\overline{EF}$ 為邊作一正方形 $EFGH$ ，在 $\overline{GH}$ 上作 $\overline{GI}=\overline{BC}$ ，連接 $\overline{BI}$ 形成正方形 $BCGI$ （於證明過程第 2 點說明 $BCGI$ 為正方形）。

3. 連接 $\overline{DH}$ 。

4. 連接 $\overline{FI}$ 交 $\overline{AE}$ 於 J 點，交 $\overline{BD}$ 於 K 點。



【求證過程】

如圖將正方形 $ABDE$ 面積分為兩長方形的和，說明前述長方形的面積可分別視為圖形中的平行四邊形面積，而平行四邊形面積可再視為正方形面積，因此可知正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 說明四邊形 $BCGI$ 為一矩形：
   因為四邊形 $BCGI$ 中，$\overline{BC}//\overline{GI}$，$\overline{BC}=\overline{GI}$ 可知 $BCGI$ 為平行四邊形，因為 $\angle BCG=90°$ 所以可推得 $BCGI$ 為一矩形。
2. 證明三角形 EDH，三角形 DBI 與三角形 ABC 全等，並由對應邊相等關係說明四 形 $BCGI$ 為正方形：

   因為 $\overline{EH}//\overline{AC}$ 且 $\overline{DE}//\overline{AB}$，所以 $\angle DEH=\angle BAC$，因為 $\overline{EH}=\overline{AC}$，$\angle DEH=\angle BAC$，

   $\overline{DE}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta EDH\cong\Delta ABC\text{(SAS 全等)},$$

可推得 $\angle DHE = \angle BCA = 90°$，因此 $\angle DHE + \angle IHE = 180°$，由此可知 $D-H-I$ 三點共線。由 $\angle EDI = \angle ABC$，及 $\angle EDI + \angle BDI = 90° = \angle ABC + \angle BAC$，推得 $\angle BDI = \angle BAC$；因為

$\overline{BD} = \overline{AB}$，$\angle BDI = \angle BAC$，$\angle BID = 90° = \angle ACB$，所以

$$\Delta DBI \cong \Delta ABC \text{(AAS 全等)},$$

因此可推得 $\overline{BI} = \overline{BC}$，再由第 1 點結論可進一步推得

四邊形 $BCGI$ 為正方形。

3. 說明四邊形 $ABIF$，$EDIF$ 為平行四邊形：

   因為 $\overline{AF} \mathbin{//} \overline{BI}$，且 $\overline{AF} = \overline{BC} = \overline{BI}$，所以由平行四邊形判別性質可知

   四邊形 $ABIF$ 為平行四邊形；

   同理因為 $\overline{EF} \mathbin{//} \overline{DI}$，$\overline{EF} = \overline{AC} = \overline{DI}$，所以

   四邊形 $EDIF$ 為平行四邊形。

4. 計算圖形中平行四邊形面積，運用線段等長找出平行四邊形與正方形面積關係：

   平行四邊形 $ABIF$ 以 $\overline{BI}$ 為底邊則對應的高為 $\overline{BC}$，則

   $$\square ABIF = \overline{BI} \times \overline{BC} = \overline{BC} \times \overline{BC} = \square BCGI;$$

   同理，若平行四邊形 $EDIF$ 以 $\overline{EF}$ 為底邊則對應的高為 $\overline{EH}$ ，則

   $$\square EDIF = \overline{EF} \times \overline{EH} = \square EFGH.$$

5. 透過圖形等底同高則面積相等的性質及其前述的說明，得到圖形中三個正方形的面積關係：

   因為 $\square ABKJ = \overline{AB} \times \overline{BK} = \square ABIF$，及 $\square DEJK = \overline{DE} \times \overline{DK} = \square DEFH$，所以再由圖形及第 4 點可推得

   $$\begin{aligned}\square ABDE &= \square ABKJ + \square DEJK \\ &= \square ABIF + \square DEFI \\ &= \square BCGI + \square EFGH\end{aligned}$$

   即

   $$\square ABDE = \square BCGI + \square EFGH.$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCGI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $EFGH$ 邊長為 $\overline{AC}$，

   所以由第 5 點結論可得

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *6*(2), 33-34
2. 心得：此證明運用圖形間等底同高的面積關係說明勾股定理，圖形還不算複雜，若將圖形之間的全等及邊長關係皆告知學生，應可引導學生發現圖形之間的關係；因為此證明圖形比 G174 多一條平行輔助線，導致兩者證明方法截然不同，比較後可發現主要方法分別是圖形的拼湊及圖形等底同高的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●