勾股定理證明-G178

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$，

2. 在 $\overline{AG}$ 上作 $\overline{AH}=\overline{BC}$，並以 $\overline{AH}$ 為邊作一正方形 $AHIJ$。

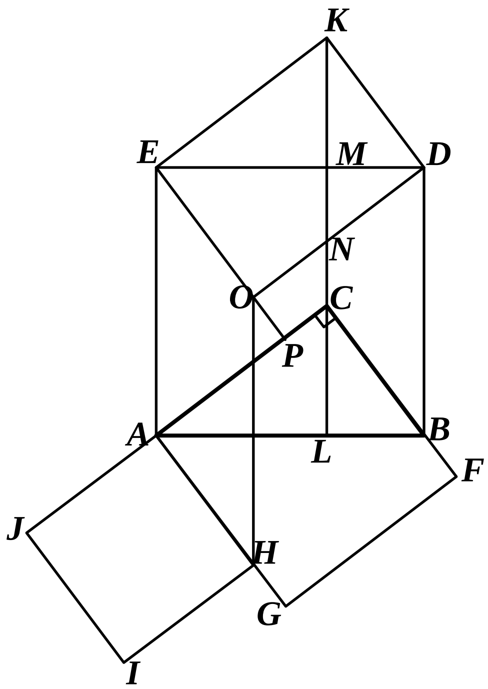
3. 以 $\overline{DE}$ 為底邊作三角形 EDK 全等於三角形 ABC。

4. 連接 $\overline{CK}$ 並延長交 $\overline{AB}$ 於 L 點，交 $\overline{DE}$ 於 M 點。

5. 從 D 點作 $\overline{DO}$ 平行 $\overline{KE}$，從 E 點作 $\overline{EO}$ 平行 $\overline{KD}$，形成長方形 $DKEO$，且 $\overline{DO}$ 交 $\overline{KL}$ 於 N 點。

6. 延長 $\overline{EO}$ 交 $\overline{AC}$ 於 P 點。

7. 連接 $\overline{OH}$。



【求證過程】

如圖將正方形 $ABDE$ 面積視為兩長方形的和，說明兩長方形的面積可分別視為圖形中的兩平行四邊形面積，而平行四邊形可再視為另外兩個正方形的和，因此可知正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明四邊形 $BCKD$，$ACKE$，$AHOE$ 為平行四邊形：

因為$\Delta EDK \cong \Delta ABC$，可知$\overline{DK} = \overline{BC}$，$\overline{DK} // \overline{BC}$，所以四邊形$BCKD$為平行四邊形，同理四邊形$ACKE$為平行四邊形；

因為$\angle EPA = 90°$，所以$\angle EAP + \angle PEA = 90°$，四邊形$AHOE$中，因為$\angle OEA = \angle PEA$，所以$\angle OEA + \angle EAH = 180°$，可推得$\overline{EO} // \overline{AH}$，且因為$\overline{EO} = \overline{DK} = \overline{BC} = \overline{AH}$，所以四邊形$AHOE$為平行四邊形；由前述可總結

四邊形$BCKD$，$ACKE$，$AHOE$ 為平行四邊形，

其中因為$\overline{BD} = \overline{AE}$，$\overline{DK} = \overline{EO}$可推得

$$BCKD \cong AHOE.$$

2. 證明三角形EAP與三角形ABC全等：

因為$\overline{DE}$是長方形$DKEO$的對角線，且$\Delta EDK \cong \Delta ABC$，推得$\Delta DEO \cong \Delta ABC$，再推得$\angle DEO = \angle ABC$，所以$\angle DEO + \angle CAB = 90°$，且因為$\angle DEO + \angle AEP = 90°$，所以$\angle AEP = \angle CAB$，因為$\overline{AE} = \overline{AB}$，$\angle APE = 90° = \angle BCA$及前述$\angle AEP = \angle CAB$，所以

$$\Delta EAP \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

可推得$\overline{EP} = \overline{AC}$，$\overline{AP} = \overline{BC}$.

3. 由圖形及第 2 點的全等三角形對應邊相等，計算平行四邊形的面積：

平行四邊形$AHOE$以$\overline{EO}$為底邊，則對應的高為$\overline{AP}$，且由第 2 點的全等三角形對應邊相等可得

$$\square AHOE = \overline{EO} \times \overline{AP} = \overline{AH} \times \overline{BC} = \overline{AH} \times \overline{AH} = \square AHIJ;$$

同理，平行四邊形$ACKE$以$\overline{AC}$為底邊，則對應的高為$\overline{EP}$，即

$$\square ACKE = \overline{AC} \times \overline{EP} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \square ACFG.$$

4. 利用前述結論說明正方形$ABDE$與另外兩個正方形的關係：

因為由圖形及第 1 點結論可知$\square BDML = \overline{BD} \times \overline{BL} = \square BCKD = \square AHOE$，且由圖形及第 3 點結論所以可推得

$$\begin{aligned} \square ABDE &= \square BDML + \square AEML \\ &= \square AHOE + \square ACKE \\ &= \square AHIJ + \square ACFG \end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square AHIJ + \square ACFG.$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形ABC三邊長關係：

因為正方形$ABDE$邊長為$\overline{AB}$，正方形$AHIJ$邊長為$\overline{BC}$，正方形$ACFG$邊長為$\overline{AC}$，因

此由第 4 點結論可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 6 月 28 日想到的。
2. 心得：此證明圖形類似 G123，雖然同樣運用簡單的圖形等底同高的面積關係，但此過程較 G123 繁瑣，若要於教學上使用建議採用 G123 的方式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				