勾股定理證明-G177

【作輔助圖】

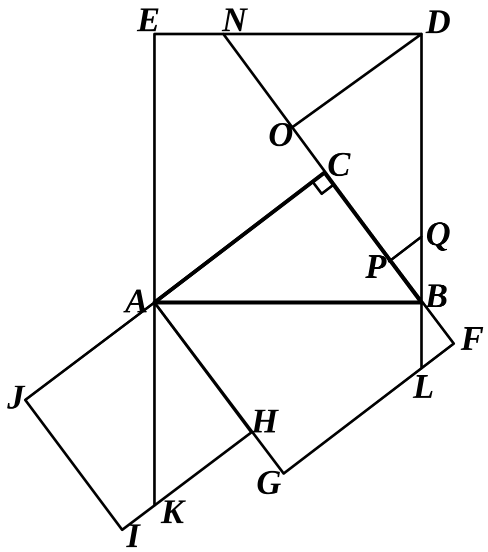
1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 在 $\overline{AG}$ 上作 $\overline{AH}=\overline{BC}$ ，並以 $\overline{AH}$ 為邊作一正方形 $AHIJ$ 。

3. 延長 $\overline{EA}$ 交 $\overline{HI}$ 於 K 點，延長 $\overline{DB}$ 交 $\overline{FG}$ 於 L 點，延長 $\overline{BC}$ 交 $\overline{DE}$ 於 N 點。

4. 從 D 點作 $\overline{DO}$ 垂直 $\overline{BN}$ 。

5. 在 $\overline{BC}$ 上取 $\overline{BP}=\overline{BF}$ ，從 P 點作 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{BP}$ 。



【求證過程】

如圖將正方形 $ABDE$ 分割為五個部分，另外兩個正方形也被分割為若干部分，利用這些分割部分圖形之間的全等及其他關係，可得到三個正方形之間的關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 BQP 全等於三角形 BLF ：

   因為 $\angle BPQ=90^{\circ}=\angle BFL$, $\overline{BP}=\overline{BF}$, $\angle PBQ=\angle FBL$, 所以

   $\Delta BQP\cong\Delta BLF$ (ASA 全等).

2. 依序證明三角形 DBO 全等於三角形 ABC，三角形 DNO 全等於三角形 AKH ：

   因為 $\angle DBO+\angle CBA=90^{\circ}=\angle CAB+\angle CBA$, 所以 $\angle DBO=\angle CAB$ ，因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$ 及

   $\angle DBO=\angle CAB$, $\angle BOD=90^{\circ}=\angle ACB$, 所以

   $\Delta BDO\cong\Delta ABC$ (AAS 全等),

由上述結果可推得$\overline{DO}=\overline{BC}$；

因為$\angle CAB+\angle BAH=90°=\angle HAK+\angle BAH$，所以$\angle HAK=\angle CAB$，因為$\overline{DO}\,//\,\overline{AC}$，$\overline{DN}$

$//\,\overline{AB}$，所以$\angle ODN=\angle CAB$，可進一步推得$\angle ODN=\angle HAK$，

因為$\angle DON=90°=\angle AHK$及前述$\angle ODN=\angle HAK$，$\overline{DO}=\overline{BC}$，所以可得

$\Delta DNO\cong\Delta AKH$ (AAS 全等).

3. 因為$\angle EAC+\angle CAB=90°=\angle GAB+\angle CBA$，所以$\angle EAC=\angle BAG$，因為四邊形$ACNE$與$ABLG$中$\angle EAC=\angle BAG$，且此兩圖形分別有另外兩內角為$90°$，所以可得這兩個四邊形的四個內角皆對應相同，且因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$對應邊相同，所以可推得

   四邊形$AENC\cong$四邊形$ABLG$;

   同理因為四邊形$AJIK$與$DOPQ$的四個內角皆對應相等，且由$\Delta DNO\cong\Delta AKH$可知

   $\overline{DO}=\overline{AH}$，推得$\overline{DO}=\overline{AJ}$，所以再由對應邊相等可得

   四邊形$AJIK\cong$四邊形$DOPQ$.

4. 運用作圖將正方形$ABDE$分割為三區塊，利用前述證明將正方形$ABDE$重新拼湊：
   由圖形及前述第 1, 2, 3 點可得

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\Delta ABC+\Delta BPQ+DOPQ+\Delta DNO+AENC\\&=\Delta ABC+\Delta BLF+AJIK+\Delta AKH+ABLG\\&=(\Delta ABC+\Delta BLF+ABLG)+(AJIK+\Delta AKH)\\&=\square ACFG+\square AHIJ\end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE=\square AHIJ+\square ACFG.$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形ABC三邊長關係：

   因為正方形$ABDE$邊長為$\overline{AB}$，正方形$AHIJ$邊長為$\overline{BC}$，正方形$ACFG$邊長為$\overline{AC}$，

   所以由第 4 點結論可得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

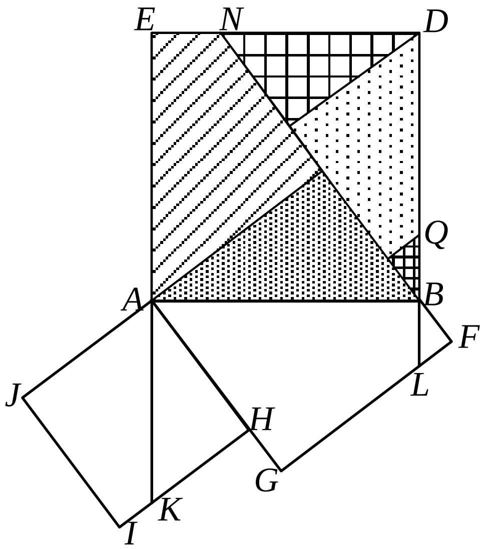
$$c^2=a^2+b^2.$$

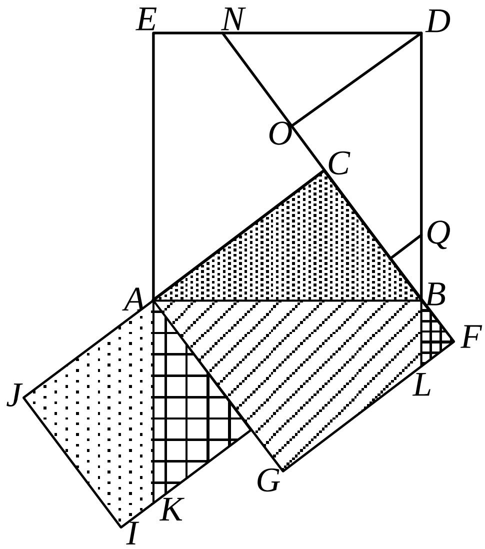
【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *6*(2), 33-34.

2. 心得：此證明圖形與 G173 的分割圖形相同，僅為分割圖形位置不同，同樣是運用全等圖形的關係，可用拼圖方式完成證明，讓學生體驗勾股定理面積意義。拼圖方式如下：





3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		