勾股定理證明-G175

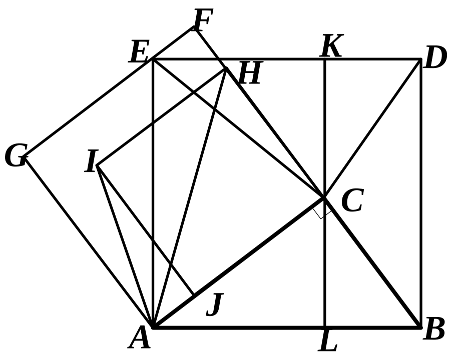
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$。

2. 以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$（於證明過程第 1 點說明$G-E-F$三點共線）。

3. 在$\overline{CF}$上做$\overline{CH}=\overline{BC}$，以$\overline{CH}$為邊做一正方形$CHIJ$，即正方形$CHIJ$邊長為$\overline{BC}$。

4. 連接$\overline{AI}$，$\overline{AH}$，$\overline{CE}$，$\overline{CD}$。



【求證過程】

將正方形$ABDE$面積視為兩個長方形面積相加，利用長方形面積可拆解為兩個三角形面積的性質，以及利用三角形之間的全等關係，可得到正方形$ABDE$與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明三角形全等並運用全等三角形的對應關係，進一步推得$G-E-F$三點共線：

   連接$\overline{GE}$，因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，$\angle EAG=\angle BAC$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   由上述可知$\angle AEG=\angle ABC$，推得$\angle AEG=\angle ABC=\angle CAE$. 因為$\angle AEG=\angle CAE$，由平行線判別性質可知$\overline{GE}//\overline{AC}$，且因為$\overline{GF}//\overline{AC}$所以$G-E-F$三點共線。

2. 證明三角形AHC與三角形ABC全等，再證明三角形AHI與三角形DBC全等

   因為 $\overline{AC}=\overline{AC}$，$\angle ACH=90°=\angle ACB$，$\overline{CH}=\overline{BC}$，所以

   $$\Delta AHC\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   因此可得$\overline{AH}=\overline{AB}$，且因為$\overline{BD}=\overline{AB}$，所以進一步得$\overline{AH}=\overline{BD}$，因為$\overline{AH}=\overline{BD}$，

   $\overline{IH}=\overline{BC}$，$\angle AHI=90°-\angle AHC=90°-\angle ABC=\angle CBD$，所以,

$$\Delta AHI \cong \Delta DBC \text{ (SAS 全等)}.$$

3. 由圖形等底同高的面積關係及第 2 點可得：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDKL + \square AEKL \\ &= 2\Delta DBC + 2\Delta ACE \\ &= 2\Delta AIH + \square ACFG \\ &= \square CHIJ + \square ACFG\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square CHIJ + \square ACFG.$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $CHIJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$ ，所以由第 3 點結論可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
J. M. Richardson(1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, *2*(2), 48.
2. 心得：因為此證明僅用了一次全等圖形做替換，接著都使用圖形等底同高的面積關係來說明，所以圖形看起來較為複雜，但運用的概念對中學生而言是容易的，雖然不適合做勾股定理教學的入門，但可以藉由圖形關係加強學生的幾何思考。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●