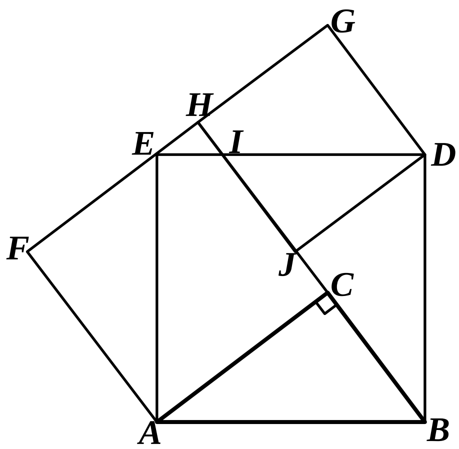
勾股定理證明-G174

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ 。

2. 以 $\overline{AE}$ 為邊，向外作一三角形 AEF 全等於三角形 ABC，以 $\overline{DE}$ 為邊，向外作一三角形 EDG 全等於三角形 ABC 。
（因為 $\angle GED = \angle CAB$，$\angle AEF = \angle ABC$，且 $\angle CAB + \angle ABC = 90°$，所以如圖所示，$G - E - F$ 三點共線）。

3. 延長 $\overline{BC}$ 交 $\overline{EG}$ 於 H ；作一線段 $\overline{DJ}$ ，使 $\overline{DJ}$ 垂直 $\overline{BH}$ ，形成正方形 $ACHF$ 與正方形 $DJHG$（於證明過程第 1 點及第 3 點說明）。



【求證過程】

作圖過程將正方形 $ABDE$ 切割成四個部分，利用這四個部分與其他圖形的全等及共用關係，可得到正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 由前述作圖過程說明四邊形 $ACHF$ 為正方形：
因為 $\Delta AEF \cong \Delta ABC$，所以 $\angle AFE = \angle ACB = 90°$，同樣原因也可得 $\angle EAF = \angle CAB$，所以 $\angle CAF = \angle CAE + \angle EAF = \angle CAE + \angle CAB = 90°$，因為 $\angle CAF = 90°$，所以推得四邊形 $ACHF$ 為矩形，因為四邊形 $ACHF$ 為矩形且 $\overline{AF} = \overline{AC}$ ，所以
四邊形 $ACHF$ 為正方形。

2. 證明三角形 BDJ 全等於三角形 ABC ：

因為 $\angle DBJ + \angle CBA = 90° = \angle CAB + \angle CBA$，所以 $\angle DBJ = \angle BAC$，因為 $\overline{BD} = \overline{AB}$，$\angle BJD = \angle ACB$ 及前述 $\angle DBJ = \angle BAC$ 所以可得

$$\Delta BDJ \cong \Delta ABC,$$

進一步得 $\overline{DJ} = \overline{BC}$.

3. 說明四邊形 $DJHG$ 為正方形：

因為 $\overline{HG}=\overline{EG}-\overline{EH}=\overline{AC}-\overline{EH}=\overline{FH}-\overline{EF}=\overline{FE}=\overline{BC}$，得 $\overline{HG}=\overline{BC}$，所以由第 2 點結論可推得 $\overline{HG}=\overline{DJ}$；因為 $\angle GHJ=90°$，$\angle DJH=90°$ 及前述 $\overline{HG}=\overline{DJ}$ 所以 $DJHG$ 為一平行四邊形，且因為 $\overline{DG}=\overline{BC}=\overline{HG}$，所以可推得

四邊形 $DJHG$ 為正方形。

4. 將正方形 $ABDE$ 透過圖形之間的全等關係重新拼湊：
由圖形及前述第 1 到 3 點可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= ACIE+\Delta ABC+\Delta BDJ+\Delta DIJ\\ &= ACIE+\Delta EDG+\Delta AEF+\Delta DIJ\\ &= ACIE+(\Delta EIH+DIHG)+\Delta AEF+\Delta DIJ\\ &= (ACIE+\Delta EIH+\Delta AEF)+(DIHG+\Delta DIJ)\\ &= \square ACHF+\square DJHG\ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE=\square DJHG+\square ACHF\ .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：
因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $DJHG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACHF$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 4 點結論可得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(p. 22). Leipz.: Friese.
   J. Versluys(1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)*(p.29). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：此證明運用圖形的全等，將分割部分用拼圖方式做簡單的移動，即可得到畢氏定理關係式，作圖類似 G165，差異在於作圖後的分割部分排列；此證明也可與 G180 作比較，兩者圖形差異僅一條平行線，但證明手法完全不同。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	