# 勾股定理證明-G173

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ ，且 $\overline{FG}$ 交 $\overline{BD}$ 於 $H$ 點。

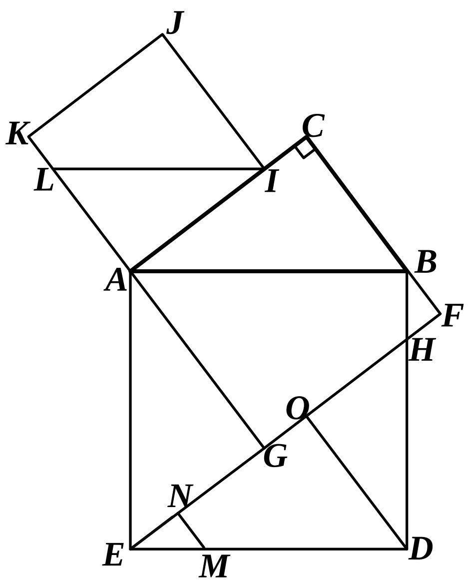
2. 在 $\overline{AC}$ 上取 $\overline{AI}=\overline{BC}$ ，作一正方形 $AIJK$ 。

3. 連接 $\overline{GE}$（在證明第 1 點說明 $G-E-F$ 三點共線）。

4. 從 $I$ 點作 $\overline{IL}$ 平行 $\overline{AB}$ 。

5. 在 $\overline{DE}$ 上取一點 $M$ 使 $\overline{EM}=\overline{BH}$ , 從 $M$ 點作 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{EF}$ 。

6. 從 $D$ 作 $\overline{DO}$ 垂直 $\overline{EF}$ 。




【求證過程】

作圖過程將正方形 $ABDE$ 切割成五個部分，利用這五個部分與其他圖形的全等及共用關係，可得到正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 $AEG$ 全等於三角形 $ABC$ ，並推得 $G-E-F$ 三點共線：

   因為 $\angle CAB+\angle BAG=90°$, $\angle GAE+\angle BAG=90°$ ，所以 $\angle GAE=\angle CAB$. 因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$,

   $\angle GAE=\angle CAB$, $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，所以

$$\Delta AEG \cong \Delta ABC \text{ (SAS)},$$

因此 $\angle AGE = 90° = \angle AGF$ ，可知 $\angle AGE + \angle AGF = 180°$ ，推得 $G - E - F$ 三點共線。

2. 證明三角形 $EMN$ 全等於三角形 $BHF$ ：

 因為 $\overline{MN} // \overline{OD}$ ，所以 $\angle EMN = \angle BHF$ ，且因為 $\angle EDO = \angle DHO = \angle BHF$ ，所以

 $\angle EMN = \angle BHF$, 因為 $\overline{EM} = \overline{BH}$, $\angle ENM = \angle BFH$ 及前述 $\angle EMN = \angle BHF$ ，所以

$$\Delta EMN \cong \Delta BHF \text{ (AAS 全等)}.$$

3. 證明三角形 $EDO$ 全等於三角形 $ABC$ ：

 因為 $\angle EDO = \angle ABC$, $\angle DOE = \angle BCA$, $\overline{DE} = \overline{AB}$, 所以

$$\Delta EDO \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 證明三角形 $DHO$ 全等於三角形 $ILA$ ：

 因為 $\overline{IL} // \overline{AB}$ ，所以 $\angle AIL = \angle BAI$ ，因為 $\angle HDO + \angle ODE = 90°$, $\angle DEO + \angle ODE = 90°$, 所以 $\angle HDO = \angle DEO = \angle BAI = \angle AIL$ 。因為前述 $\angle HDO = \angle AIL$ ，及 $\overline{OD} = \overline{BC} = \overline{AI}$ ,

 $\angle HOD = 90° = \angle LAI$ ，所以可得

$$\Delta DHO \cong \Delta ILA \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 說明四邊形 $DONM$ 與四邊形 $IJKL$ 全等：

 由前述 $\Delta DHO \cong \Delta ILA$ 可知 $\overline{IL} = \overline{DH} = \overline{BD} - \overline{BH} = \overline{DE} - \overline{EM} = \overline{DM}$ ，即

$$\overline{IL} = \overline{DM},$$

 由 $\Delta EDO \cong \Delta ABC$ 可得 $\overline{CF} = \overline{AC} = \overline{OE}$ ，推得 $\overline{JK} = \overline{BC} = \overline{CF} - \overline{BF} = \overline{OE} - \overline{EN} = \overline{ON}$ ，即

$$\overline{JK} = \overline{ON},$$

 因為 $\Delta EDO \cong \Delta ABC$ 所以 $\overline{DO} = \overline{BC} = \overline{IJ}$ ，由前述 $\overline{IL} = \overline{DM}$, $\overline{JK} = \overline{ON}$, $\overline{DO} = \overline{IJ}$ 且

 $\angle LKJ = 90° = \angle MNO$, $\angle KJI = 90° = \angle NOD$, $\angle JIL = \angle ODM$ ，所以

$$\text{四邊形 } DONM \cong \text{四邊形 } IJKL.$$

6. 由圖形的分割及拼湊及前述第 1 到第 5 點可得：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= AOHB + \Delta AEG + \Delta EMN + DONM + \Delta DHO \\ &= AOHB + \Delta ABC + \Delta BHF + IJKL + \Delta ILA \\ &= \square ACFG + \square AIJK \ ,\end{aligned}$$

 即

$$\square ABDE = \square AIJK + \square ACFG \ .$$

7. 整理第 6 點的結果，找出直角三角形 $ABC$ 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $AIJK$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 6 點結論可得

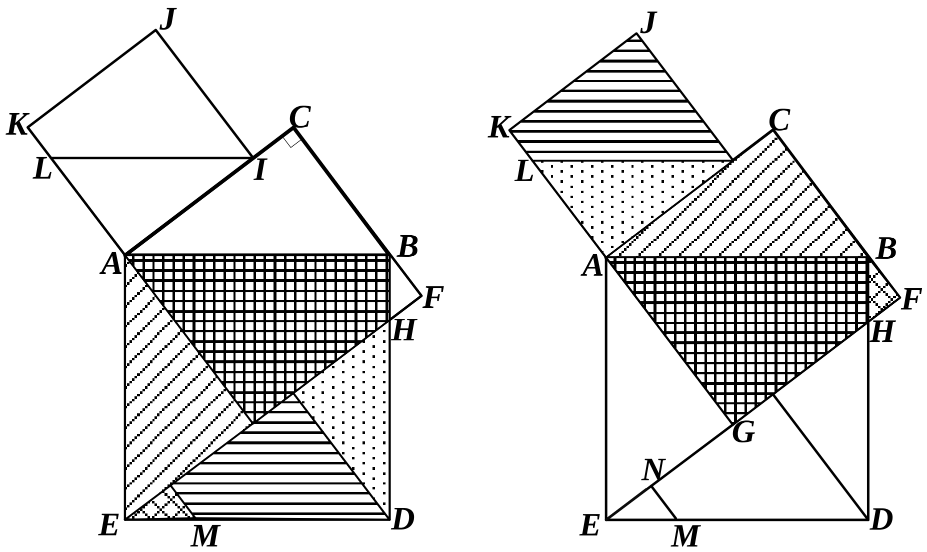
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard Bell 在 1914 年 6 月 4 日所提供的。
2. 心得：此證明運用切割部分圖形的全等關係，透過拼湊得到三個正方形的關係，此證明適合讓學生以拼圖方式操作體驗；此證明圖形可由不同的作圖位置，得到相同的分割圖形，可參考 G177。拼圖方式如下：




3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | | |