勾股定理證明-G172

【作輔助圖】

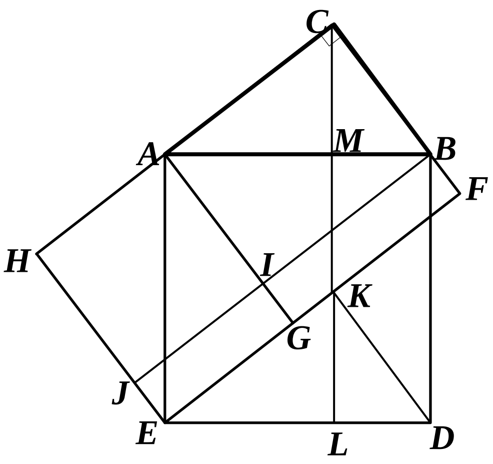
1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$。

2. 連接 $\overline{GE}$（在證明過程第 1 點說明 $G-E-F$ 三點共線），延長 $\overline{AC}$ 使 $\overline{AH}=\overline{BC}$，連接 $\overline{EH}$。

3. 從 B 點作一平行線分別交 $\overline{AG}$, $\overline{HE}$ 於 I, J 點，使得 $AHJI$ 為一正方形（在證明第 2 點說明）。

4. 從 D 點作 $\overline{DK}$ 垂直 $\overline{EF}$。

5. 從 C 點作 $\overline{CL}$ 垂直 $\overline{DE}$，且交 $\overline{AB}$ 於 M 點。



【求證過程】

如圖正方形 $ABDE$ 可視為兩長方形面積的和，證明兩長方形面積分別等於圖形中兩平行四邊形，再利用圖形等底同高的面積關係，可推得正方形 $ABDE$ 面積相當於圖形中另外兩個正方形面積和，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEG 全等於三角形 ABC，並推得 $G-E-F$ 三點共線：

因為 $\angle CAB+\angle BAG=90°$, $\angle GAE+\angle BAG=90°$，所以 $\angle GAE=\angle CAB$. 因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$, $\angle GAE=\angle CAB$, $\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta AEG\cong\Delta ABC\ \text{(SAS)},$$

因此 $\angle AGE=90°=\angle AGF$，可知 $\angle AGE+\angle AGF=180°$，推得 $G-E-F$ 三點共線。

2. 說明四邊形 $AHJI$ 為正方形：

因為前述 $\Delta AEG \cong \Delta ABC$ 可知 $\overline{EG}=\overline{BC}$ ，及 $\overline{EG} // \overline{AH}$ ，所以 $AHJI$ 為一平行四邊形，且

因為 $\angle IAH = 90°$ ，所以可推得 $AHJI$ 為以 $\overline{BC}$ 為邊長的正方形。

3. 證明三角形 CKF 全等於三角形 ABC，運用全等三角形對應邊等長性質，計算平行四邊形 $BCKD$ 與平行四邊形 $ACKE$ 面積：

因為 $\angle BCM + \angle ACM = 90°$, $\angle BAC + \angle ACM = 90°$ ，所以 $\angle BCM = \angle CAM$, 即

$\angle FCK = \angle CAB$ ；因為 $BCKD$ 為平行四邊形，所以 $\overline{CK}=\overline{BD}=\overline{AB}$,

因為 $\overline{CF}=\overline{AC}$, 及前述 $\angle FCK = \angle CAB$, $\overline{CK}=\overline{AB}$, 所以

$$\Delta CKF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

推得 $\overline{FK}=\overline{BC}$, 所以

$$\square BCKD = \overline{BC} \times \overline{FK} = \overline{BC} \times \overline{BC} = \square AHJI\,;$$

同理，

$$\square ACKE = \overline{AC} \times \overline{CF} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \square ACFG\,.$$

4. 由圖形及第 3 點結果可知：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDLM + \square AELM \\ &= \square BCKD + \square ACKE \\ &= \square AHJI + \square ACFG\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square AHJI + \square ACFG\ .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $AHIJ$ 邊長為 $\overline{BC}$, 正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$ ，所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 6*(2), 33-34.
2. 心得：此證明圖形與 G169 類似，但兩者是完全不同的方式去證明勾股定理，在此是運用圖形間等底同高去觀察面積關係，而 G169 是運用圖形間的全等拼湊，去說明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●