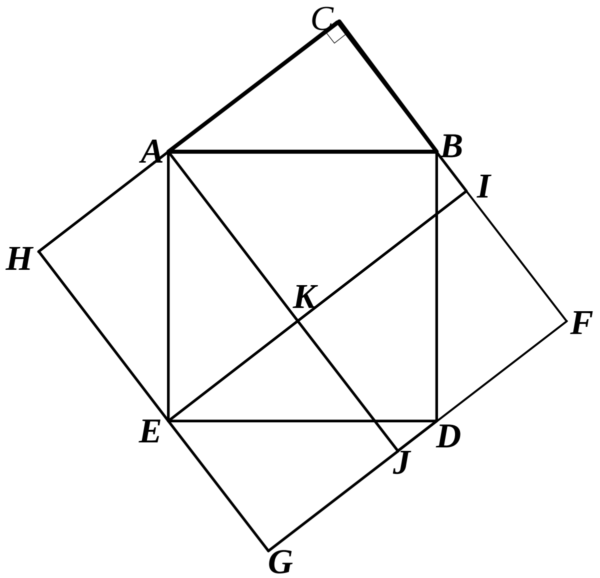
勾股定理證明-G171

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$；分別以 $\overline{BD}$，$\overline{DE}$，$\overline{AE}$ 為邊，作出三個全等於三角形 ABC 的直角三角形，使之與三角形 ABC 圍成正方形 $CFGH$。
2. 從 E 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，交 $\overline{CF}$ 於 I 點；從 A 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 $\overline{FG}$ 於 J 點，且 $\overline{EI}$ 與 $\overline{AJ}$ 交於 K 點,同時形成正方形 $ACIK$ 與正方形 $EKJG$（於證明過程第 1 點中說明）。



【求證過程】

如圖正方形 $ABDE$ 可視為外圍最大正方形扣除周圍四個直角三角形，又外圍正方形可拆成四個四邊形，利用圖形的分割與相等關係，可得正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係，即可推得勾股定理關係式。

1. 說明四邊形 $ACIK$ 與四邊形 $EKJG$ 為正方形：

   因為由作圖過程可知,正方形 $CFGH$ 被切割成四個矩形 $ACIK$，$AKEH$，$EKJG$，$IFJK$。

   因為四邊形 $AKEH$ 為一矩形，且 $\Delta EAH \cong \Delta ABC$，所以 $\Delta AEK \cong \Delta ABC$，可得 $\overline{AK}=\overline{AC}$，$\overline{EK}=\overline{BC}$.

   因為四邊形 $ACIK$ 為一矩形，且 $\overline{AK}=\overline{AC}$，$\overline{AC}=\overline{KI}$，所以

   四邊形 $ACIK$ 為一正方形；

   因為四邊形 $EKJG$ 為一矩形且 $\Delta DEG \cong \Delta ABC$，可知 $\overline{EG}=\overline{BC}=\overline{EK}$，所以

   四邊形 $EKJG$ 為一正方形。

2. 由圖形的分割及前述第 1 點結果可知：

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \square CFGH - 4\Delta ABC \\
&= \square EKJG + \square ACIK + \square AKEH + \square IFJK - 4\Delta ABC \\
&= \square EKJG + \square ACIK + 2\Delta ABC + 2\Delta ABC - 4\Delta ABC \\
&= \square EKJG + \square ACIK
\end{aligned}
$$

即

$$\square ABDE = \square EKJG + \square ACIK\ .$$

3. 整理第 2 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $EKJG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACIK$ 邊長為 $\overline{AC}$ 所以由第 2 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

W. W. Rouse Ball(1888). *A Short Account of the History of Mathematics*(p.24)**.** New York : Dover.

Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry*(p.162). New York : Macmillan and co.

Beman, Wooster Woodruff and Smith, David Eugene(1899). *New Plane and Solid Geometry*(p.103). Boston : Ginn & company.

2. 心得：此證明的作圖過程較簡易，圖形之間的拼湊關係也並不複雜，因此容易理解，只是在於中間的正方形必須以最外圍圖形去扣除部分圖形，因此必須搭配代數式子，無法直接用拼圖方式操作。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●