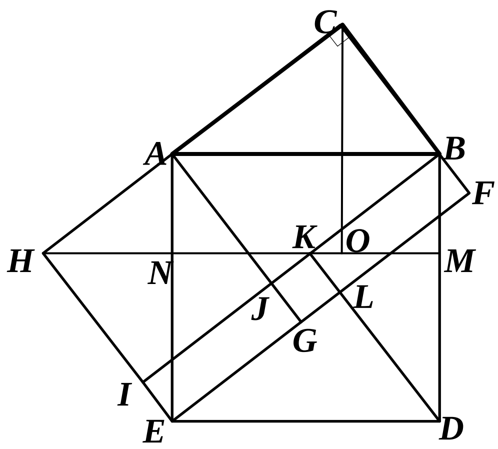
勾股定理證明-G170

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$。
2. 連接$\overline{GE}$（由證明過程第 1 點可知$F-G-E$ 三點共線）。
3. 延長$\overline{AC}$作$\overline{AH}=\overline{BC}$。
4. 連接$\overline{HE}$，在$\overline{HE}$上作$\overline{HI}=\overline{BC}$；連接$\overline{IB}$並與$\overline{AG}$交於$J$點形成正方形$AHIJ$（G169 已說明四邊形$AHIJ$為正方形）。
5. 從D點作$\overline{DK}$垂直$\overline{IB}$，交$\overline{EF}$於L點。
6. 從H點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{BD}$於M點，且$\overline{HM}$交$\overline{AE}$於N。
7. 從C點作$\overline{CO}$垂直$\overline{HM}$。



【求證過程】

由作圖可將正方形$ABDE$的面積分割為為兩矩形之和，接著運用圖形等底同高則面積相等的性質，說明這兩個矩形與另外兩個正方形的關係，即可推得勾股定理關係式。

1. 證明三角形AEG全等於三角形ABC，並推得$F-G-E$三點共線：

   因為$\angle EAG+\angle BAG=90°$, $\angle CAB+\angle BAG=90°$, 所以$\angle EAG=\angle CAB$. 因為前述

   $\angle EAG=\angle CAB$, 及$\overline{AE}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, 所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   由上述結論可推得$\angle AGE+\angle AGF=90°+90°=180°$, 因此$F-G-E$三點共線。
2. 證明三角形EDL全等於三角形ABC：

因為 $\overline{DL} \perp \overline{EL}$，所以 $\angle ELD = 90° = \angle ACB$，因為 $\overline{DL} // \overline{BC}$， $\overline{DE} // \overline{AB}$，所以 $\angle EDL =$ $\angle ABC$. 因為 $\overline{DE} = \overline{AB}$，及前述 $\angle ELD = 90° = \angle ACB$， $\angle EDL = \angle ABC$，所以

$$\Delta EDL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

3. 由圖形可知

$$\square ABMN = \overline{AB} \times \overline{BM} = \square ABKH,$$

另外因為平行四邊形 $ABKH$ 以 $\overline{BK}$ 為底邊，則 $\overline{HI}$ 為高，推得

$$\square ABKH = \overline{BK} \times \overline{HI} = \overline{AH} \times \overline{BC},$$

且由作圖過程可知 $\overline{AH} = \overline{BC}$，所以

$$\square ABKH = \overline{AH} \times \overline{AH} = \square AHIJ,$$

綜合上述可得

$$\square ABMN = \square ABKH = \square AHIJ.$$

4. 由圖形可知

$$\square DENM = \overline{DE} \times \overline{DM} = \square DEHK,$$

另外平行四邊形 $DEHK$ 以 $\overline{DK}$ 為底邊，則 $\overline{EL}$ 為高，推得

$$\square DEHK = \overline{DK} \times \overline{EL};$$

因為四邊形 $CFEH$ 為一矩形，所以 $\overline{EH} = \overline{CF} = \overline{AC}$，且 $\overline{DK} = \overline{EH}$，所以 $\overline{DK} = \overline{AC}$，

因為前述 $\square DEHK = \overline{DK} \times \overline{EL}$， $\overline{DK} = \overline{AC}$，及由第 2 點可知 $\overline{EL} = \overline{AC}$，所以

$$\square DEHK = \overline{DK} \times \overline{EL} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \square ACFG,$$

綜合上述可得

$$\square DENM = \square DEHK = \square ACFG.$$

5. 由圖形可知及前述第 3, 4 點結論可得：

$$\square ABDE = \square ABMN + \square DENM$$
$$= \square ABKH + \square DEHK$$
$$= \square AHIJ + \square ACFG\ ,$$

即

$$\square ABDE = \square AHIJ + \square ACFG\ .$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $AHIJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以由第 5 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 6*(2), 33-34.
2. 心得：此證明圖形雖看起來較複雜，用到的概念卻只是小學即學過的圖形間等底同高的面積關係，但由於圖形複雜因此仍算較進階的證明，此類證明圖形可加強學生的幾何概念，並藉此體會勾股定理的背後面積概念；輔助線中的 $\overline{CO}$ 在證明過程中並沒有使用到，可省略。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	