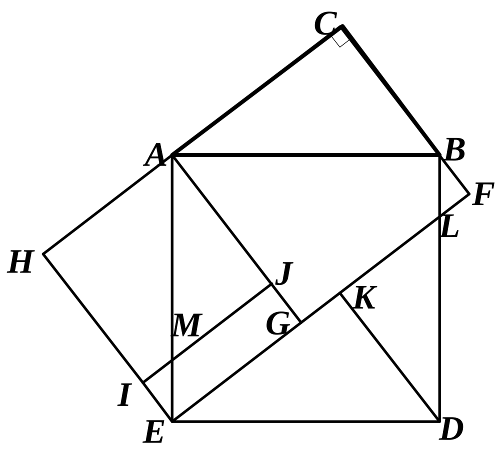
勾股定理證明-G169

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$。
2. 連接$\overline{GE}$（由證明過程第 1 點可知$F-G-E$三點共線）。
3. 延長$\overline{AC}$作$\overline{AH}=\overline{BC}$。
4. 連接$\overline{HE}$，在$\overline{HE}$上作$\overline{HI}=\overline{BC}$，從$I$點作垂線交$\overline{AG}$於$J$點，形成正方形$AHIJ$且$\overline{IJ}$交$\overline{AE}$於$M$點（由第 2 點全等三角形的對應角可推得，四邊形$AHIJ$為平行四邊形，因為$\overline{AH}=\overline{HI}$，所以形成正方形$AHIJ$）。
5. 從D點作$\overline{DK}$垂直$\overline{GF}$。



【求證過程】

如圖正方形$ABDE$被分割四大部分，利用三角形的全等及圖形的拼湊，可將正方形$ABDE$改寫為另外兩的正方形的和，即可推得勾股定理關係式。

1. 證明三角形AEG與三角形ABC全等，並由此說明$F-G-E$三點共線：
   因為$\angle EAG+\angle BAG=90°$，$\angle CAB+\angle BAG=90°$，所以$\angle EAG=\angle CAB$. 因為前述$\angle EAG=\angle CAB$，及$\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，所以
   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$
   由上述結論推得$\angle AGE+\angle AGF=90°+90°=180°$，因此$F-G-E$三點共線。
2. 由第一點結果證明三角形EAH與三角形AEG全等，推得四邊形$AHIJ$為正方形：
   因為$\angle EAH+\angle EAG=90°$，$\angle AEG+\angle EAG=90°$，所以$\angle EAH=\angle AEG$；因為由第1點結

論可推得 $\overline{BC}=\overline{EG}$，又 $\overline{AH}=\overline{BC}$ 因此可得 $\overline{AH}=\overline{EG}$，因為 $\overline{AH}=\overline{EG}$，$\overline{AE}=\overline{AE}$，及前述 $\angle EAH=\angle AEG$，所以

$$\Delta EAH\cong\Delta AEG\,(\text{SAS 全等}).$$

因此可由前述全等三角形的對應角推得，四邊形 $AHIJ$ 為平行四邊形，且因為 $\overline{AH}=\overline{HI}$，所以四邊形 $AHIJ$ 為正方形。

3. 證明三角形 EMI 與三角形 BLF 全等：

   因為四邊形 $AHIJ$ 為正方形，且邊長為 $\overline{BC}$，由第 2 點結論可推得 $\overline{HE}=\overline{AG}$，又 $\overline{AG}=\overline{CF}$，因此 $\overline{HE}=\overline{CF}$，所以由圖形可知 $\overline{IE}=\overline{HE}-\overline{HI}=\overline{CF}-\overline{BC}=\overline{BF}$，即 $\overline{IE}=\overline{BF}$；

   因為 $\overline{IE}\,//\,\overline{BF}$，$\overline{ME}\,//\,\overline{BL}$，所以 $\angle MEI=\angle LBF$，因為前述 $\overline{IE}=\overline{BF}$，$\angle MEI=\angle LBF$，及 $\angle EIM=90^\circ=\angle BFL$，所以

$$\Delta EMI\cong\Delta BLF\,(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形 AMJ 與三角形 DLK 全等：

   因為第 3 點結論得 $\overline{EM}=\overline{BL}$，又 $\overline{AE}=\overline{BD}$，所以 $\overline{AM}=\overline{DL}$；因為 $\overline{AG}\,//\,\overline{DK}$，$\overline{AE}\,//\,\overline{BD}$，所以 $\angle MAJ=\angle LDK$，因為前述 $\overline{AM}=\overline{DL}$，$\angle MAJ=\angle LDK$，且 $\angle AJM=90^\circ=\angle DKL$，所以可推得

$$\Delta AMJ\cong\Delta DLK\,(\text{AAS 全等}).$$

5. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割為四區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= AGLB+\Delta EDK+\Delta AEG+\Delta DLK\\ &= AGLB+\Delta ABC+\Delta EAH+\Delta AMJ\\ &= AGLB+\Delta ABC+\Delta EMI+AHIM+\Delta AMJ\\ &= (AGLB+\Delta ABC+\Delta BLF)+(AHIM+\Delta AMJ)\\ &= \square ACFG+\square AHIJ\ ,\end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE=\square ACFG+\square DIFJ\ .$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $AHIJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，

所以由第 5 點結論可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 6*(2), 33-34.
2. 心得：此證明的圖形與 G168 的分割圖形雷同，差別僅在於分割出來的圖形位置不同，和 G168 皆可讓學生運用全等圖形的關係，用拼圖方式操作體驗。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	