勾股定理證明-G168

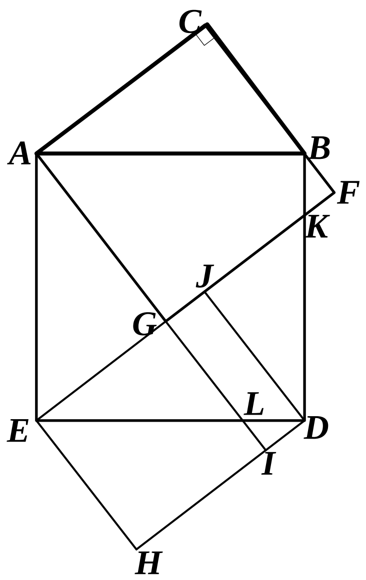
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 連接 $\overline{GE}$（由證明過程第 1 點可知 $F-G-E$ 三點共線，且 $\overline{GE}=\overline{BC}$ ），以 $\overline{GE}$ 為其中一邊，延長 $\overline{AG}$ 作一正方形 $GEHI$ 。

3. 從 D 點作一直線平行 $\overline{BC}$ 且交 $\overline{FG}$ 於 J 點，連接 $\overline{ID}$ 。

4. 作圖過程中，$\overline{FG}$ 交 $\overline{BD}$ 於 K 點；$\overline{GI}$ 交 $\overline{ED}$ 於 L 點。



【求證過程】

作圖過程將正方形 $ABDE$ 分割，利用圖形之間的全等關係，可將正方形 $ABDE$ 的分割重新組合成另外兩個正方形的和，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEG 與三角形 ABC 全等，進一步推得 $F-G-E$ 三點共線：
   因為 $\angle EAG+\angle BAG=90°$，$\angle CAB+\angle BAG=90°$，所以 $\angle EAG=\angle CAB$，因為前述

   $\angle EAG=\angle CAB$，及 $\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   由上述結論推得 $\angle AGE+\angle AGF=90°+90°=180°$，因此 $F-G-E$ 三點共線。
2. 證明三角形 EDJ 與三角形 ABC 全等：

   因為 $\overline{DJ}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，所以 $\angle JDE=\angle CBA$，且因為 $\overline{DE}=\overline{AB}$，$\angle EJD=90°=\angle ACB$

所以可得

$$\Delta EDJ \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)},$$

由此可知 $\overline{DJ} = \overline{BC}$，再由第 1 點結論可推得 $\overline{DJ} = \overline{EG}$.

3. 證明三角形 DKJ 與三角形 ELG 全等：
因為 $\angle KDJ + \angle JDE = 90°$，$\angle JED + \angle JDE = 90°$，所以 $\angle KDJ = \angle JED = \angle GEL$，

因為 $\angle KDJ = \angle GEL$，及 $\angle DJK = 90° = \angle EGL$，且由第 2 點可知 $\overline{DJ} = \overline{EG}$，所以

$$\Delta DKJ \cong \Delta ELG \text{ (ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $DJEH$ 為一矩形進一步得三角形 DEH 與三角形 EDJ 全等：

由上述 $\Delta DKJ \cong \Delta ELG$ 可推得 $\overline{DJ} = \overline{EG} = \overline{GI}$，且因為 $\overline{DJ} \,//\, \overline{GI}$，$\angle DJG = 90° = \angle JGI$，所以四邊形 $DJGI$ 為一矩形，因此 $D-I-H$ 三點共線；

因為由上述四邊形 $DJGI$ 為矩形，可推論四邊形 $DJEH$ 也為一矩形，且由 $\overline{DE}$ 為矩形 $DJEH$ 的對角線，所以可得

$$\Delta DEH \cong \Delta EDJ .$$

5. 證明三角形 DLI 與三角形 BKF 全等：

由第 3 點結論 $\Delta DKJ \cong \Delta ELG$ 可推得 $\overline{DK} = \overline{EL}$，因此 $\overline{BK} = \overline{DL}$ ；因為 $\Delta DKJ \cong \Delta ELG$ 可知 $\angle ELG = \angle DKJ$，且 $\angle ELG = \angle DLI$，$\angle DKJ = \angle BKF$，所以 $\angle DLI = \angle BKF$；
由第 4 點四邊形 $DJGI$ 為一矩形可知 $\angle DIL = 90°$，因此 $\angle DIL = \angle BFK$，因為 $\angle DIL = \angle BFK$，及前述 $\overline{BK} = \overline{DL}$，$\angle DLI = \angle BKF$，所以

$$\Delta DLI = \Delta BKF \text{ (AAS 全等)}.$$

6. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割為四區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：
由圖形及前述五點可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= ABKG + \Delta AEG + \Delta EDJ + \Delta DKJ \\ &= ABKG + \Delta ABC + \Delta DEH + \Delta ELG \\ &= ABKG + \Delta ABC + \Delta DLI + EHIL + \Delta ELG \\ &= (ABKG + \Delta ABC + \Delta BKF) + (EHIL + \Delta ELG) \\ &= \square ACFG + \square GEHI \ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square ACFG + \square GEHI ,$$

7. 整理第 6 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $GEHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，

因此由第 6 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Edwards, George C(1895). *Elements of Geometry* (p.156). New York: Macmillan and co.
2. 心得：此證明圖形延續 G165 及 G166 的正方形平移，但若作圖僅改變正方形的平移位置，則無法透過圖形的全等關係證明勾股定理，因此需要做另一條輔助線，方能運用圖形的全等關係來說明三個正方形的面積關係，此證明同樣可運用拼圖方式讓學生操作。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	