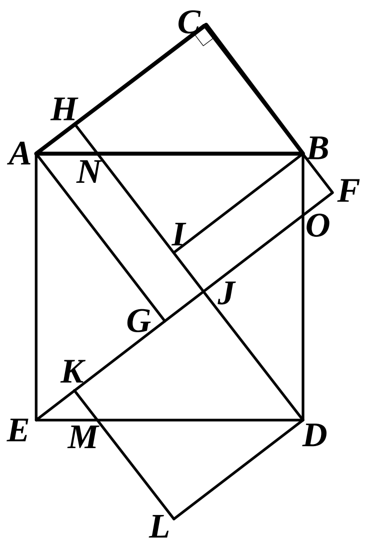
勾股定理證明-G167

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $BCHI$ 。
2. 連接 $\overline{GE}$（由證明過程第 1 點可知 $F-G-E$ 三點共線）。
3. 連接 $\overline{ID}$ ，並與 $\overline{FG}$ 交於 J 點（由證明過程第 2 點可知 $H-I-D$ 三點共線）。
4. 以 $\overline{DJ}$ 為邊作出一正方形 $DJKL$ 。



【求證過程】

如圖將正方形 $ABDE$ 分割為四個三角形，一個梯形及凹六邊形的和，利用三角形之間的全等關係及圖形的拼湊，可找出正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係式，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEG 全等於三角形 ABC ，推得 $F-G-E$ 三點共線：
   因為 $\angle EAG+\angle BAG=90°$, $\angle CAB+\angle BAG=90°$, 所以 $\angle EAG=\angle CAB$, 因為前述 $\angle EAG=\angle CAB$, 且 $\overline{AE}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, 所以
   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$
   由上述結論推得 $\angle AGE+\angle AGF=90°+90°=180°$, 因此 $F-G-E$ 三點共線。
2. 先證明三角形 DBI 全等於三角形 ABC ，推得 $H-I-D$ 三點共線：
   因為 $\angle DBI+\angle NBI=90°=\angle ABC+\angle NBI$, 所以 $\angle DBI=\angle ABC$, 因為 $\overline{BI}=\overline{BC}$, $\overline{BD}=\overline{AB}$,
   及前述 $\angle DBI=\angle ABC$ 可得

$$\Delta DBI \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

由上述結果可推得 $\angle BID + \angle BIH = 90° + 90° = 180°$，即 $H - I - D$ 三點共線。

3. 證明三角形 EDJ 全等於三角形 ABC，再運用此結果及其他圖形關係，可推得三角形 EDJ 全等於三角形 ABC：

   因為 $\overline{JE} // \overline{AC}$，$\overline{DJ} // \overline{BC}$，且 $\overline{DE} // \overline{AB}$，所以 $\angle JED = \angle CAB$，$\angle JDE = \angle CBA$，又因為

   $\overline{DE} = \overline{AB}$，所以

$$\Delta EDJ \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)},$$

   由上述結果可推得 $\overline{DJ} = \overline{BC}$，即正方形 $DJKL$ 邊長為 $\overline{BC}$；

   因為 $\angle JOD = \angle IBD$，$\angle IBD + \angle NBI = 90°$，推得 $\angle JOD + \angle NBI = 90°$，且因為

   $\angle JOD + \angle ODJ = 90°$，所以得 $\angle ODJ = \angle NBI$，因為 $\overline{DJ} = \overline{BC} = \overline{BI}$，$\angle DJO = 90° = \angle BIN$，

   及前述 $\angle ODJ = \angle NBI$，所以可得

$$\Delta DOJ \cong \Delta BNI \text{ (ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形 DML 全等於三角形 BNI，由此推得三角形 DML 全等於三角形 DOJ，進一步推得三角形 EML 全等於三角形 BOF：

   因為 $\overline{AB} // \overline{DE}$，$\overline{BI} // \overline{DL}$，所以 $\angle MDL = \angle NBI$，又因為 $\overline{DL} = \overline{BI}$，$\angle DLM = 90° = \angle BIN$，

   所以可得

$$\Delta DML \cong \Delta BNI \text{ (ASA 全等)};$$

   再由第 3 點結論可推得

$$\Delta DML \cong \Delta DOJ,$$

   因此 $\overline{DM} = \overline{DO}$，進一步得知 $\overline{EM} = \overline{BO}$；

   因為 $\angle BOF + \angle OBF = 90°$，$\angle BOF = \angle EOD$，所以 $\angle EOD + \angle OBF = 90°$，且因為

   $\angle KEM + \angle EOD = 90°$，因此 $\angle KEM = \angle OBF$，因為前述 $\overline{EM} = \overline{BO}$，$\angle KEM = \angle OBF$ 以

   及 $\angle EKM = 90° = \angle BFO$，所以可得

$$\Delta EMK \cong \Delta BOF \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 由前述三角形全等關係說明梯形 $KMDJ$ 全等於梯形 $HNBC$：

   因為由前述結論 $\Delta EMK \cong \Delta BOF$，$\Delta EDJ \cong \Delta ABC$，所以由圖形可知

$$KMDJ \cong HNBC.$$

6. 由第 4 點中的三角形全等關係，推得三角形 EMK 全等於三角形 ANH：

   因為第 4 點中 $\Delta DML \cong \Delta BNI$ 可知 $\overline{DM} = \overline{BN}$，且因為 $\overline{AB} = \overline{DE}$，所以 $\overline{EM} = \overline{AN}$；同理，

   由 $\Delta DML \cong \Delta BNI$ 可知 $\angle DML = \angle BNI$，所以 $\angle EMK = \angle ANH$，由前述 $\overline{EM} = \overline{AN}$，

$\angle EMK = \angle ANH$, 及 $\angle EKM = 90° = \angle AHN$, 所以可得

$$\Delta EMK \cong \Delta ANH \text{ (AAS 全等)}.$$

7. 運用作圖將正方形 *ABDE* 分割為四區塊，利用前述證明將正方形 *ABDE* 重新拼湊：由圖形及前述結論結論可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AEG + \Delta EMK + KMDJ + \Delta DOJ + \Delta BNI + AGOBIN \\ &= \Delta ABC + \Delta BOF + HNBC + \Delta BNI + \Delta BNI + AGOBIN \\ &= (\Delta ABC + \Delta BNI + AGOBIN + \Delta BOF) + (HNBC + \Delta BNI) \\ &= \square ACFG + \square BCHI \ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI \ .$$

8. 整理第 7 點的結果，找出直角三角形 *ABC* 三邊長關係：

因為正方形 *ABDE* 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 *ACFG* 邊長為 $\overline{AC}$, 正方形 *BCHI* 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 7 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   A. R. Colburn(1910). The Pons AsinorumScientific. *American Supplement*, *5*, 359.
2. 心得：此證明與 G165、G166 類似，差別在於作圖形成的正方形位置不同，也因為如此，此證明較不適合讓學生以拼圖方式體會勾股定理，若作圖中捨去正方形 *BCHI* 則與 G166 完全相同，就適合以實物做拼圖發現勾股定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				