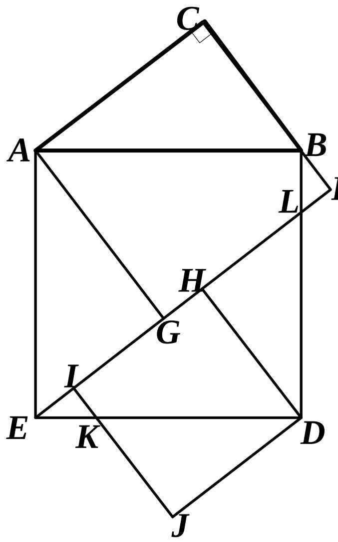
勾股定理證明-G166

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$，以 $\overline{BC}$ 為邊長，D 為頂點作一正方形 $DHIJ$，且 $\overline{IJ}$ 交 $\overline{DE}$ 於 K 點。
2. 連接 $\overline{IE}$（證明過程第 1 點將說明 $G-F-E$ 三點共線）。



【求證過程】

由作圖過程可將正方形 $ABDE$ 分割為五個部分，接著證明圖形之間的全等關係，及圖形拼湊可得正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係，可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEF 全等於三角形 ABC：

   因為 $\angle EAF+\angle BAF=90^\circ$，$\angle CAB+\angle BAF=90^\circ$，所以 $\angle EAF=\angle CAB$，因為前述 $\angle EAF=\angle CAB$，及 $\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AF}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta AEF\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   由上述結論可知 $\angle AFE=\angle ACB=90^\circ$，因此可推論 $G-F-E$ 三點共線。

2. 證明三角形 DHL 全等於三角形 DJK：

   因為 $\angle LDH+\angle HDK=90^\circ$，$\angle JKD+\angle HDK=90^\circ$ 所以 $\angle LDH=\angle JDK$，因為 $\overline{DH}=\overline{DJ}$，$\angle DHL=90^\circ=\angle DJK$，及前述 $\angle LDH=\angle KDJ$，所以

   $$\Delta DHL\cong\Delta DJK\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 證明三角形 EKI 全等於三角形 BLF：

   因為上述 $\Delta DHL\cong\Delta DJK$，可知 $\overline{DK}=\overline{DL}$，所以可推得 $\overline{EK}=\overline{ED}-\overline{DK}=\overline{BD}-\overline{DL}=\overline{BL}$，

即 $\overline{EK}=\overline{BL}$ ；因為 $\Delta DHL \cong \Delta DJK$，可知 $\angle DKJ=\angle DLH$，進一步推得 $\angle EKI=\angle BLF$，

因為前述可知 $\overline{EK}=\overline{BL}$，$\angle EKI=\angle BLF$ 及 $\angle EIK=90°=\angle BFL$，所以

$$\Delta EKI \cong \Delta BLF \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割為五區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：由圖形及前述 3 點結論可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= ABLG+\Delta AEH+\Delta EKI+DKIH+\Delta DJK\\ &=(ABLG+\Delta ABC+\Delta BLF)+(DKIH+\Delta DKJ)\\ &=\square ACFG+\square DHIJ\ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE=\square ACFG+\square DHIJ$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $DHIJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

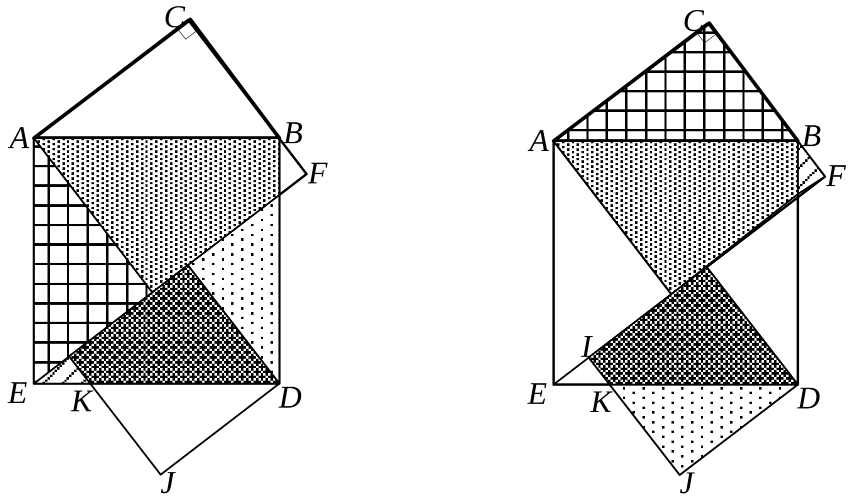
即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.161). New York : Macmilla and co.

2. 心得：此證明圖形與 G165 差別在於以 $\overline{BC}$ 為邊長的正方形位置不同，差異為其中一個正方形的平移，導致分割部分有些微的不同，但仍適合讓學生利用圖形之間全等關係運用拼圖方式體會勾股定理。拼圖方式如下：



3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：

華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。