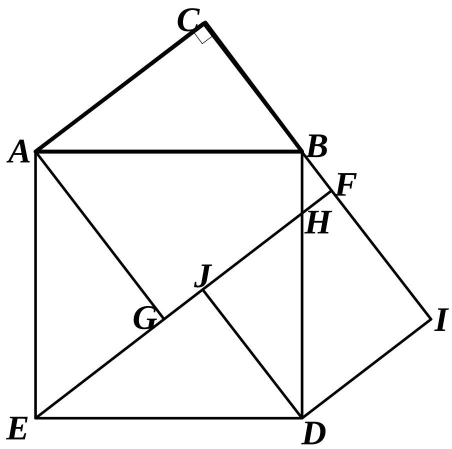
勾股定理證明-G165

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$，且 $\overline{FG}$ 交 $\overline{BD}$ 於 H 點。
2. 延長 $\overline{BC}$ 到 I 使 $\overline{BI}=\overline{AC}$，在 $\overline{BI}$ 上取 $\overline{FI}=\overline{BC}$，且以 $\overline{FI}$ 為一邊作一正方形 $DIFJ$（於證明過程第 2 點說明此正方形過 D 點）。
3. 連接 $\overline{GE}$（證明過程第 1 點將說明 $F-G-E$ 三點共線）。



【求證過程】

運用作圖結果將正方形 $ABDE$ 分割，接著利用三角形的全等及圖形間的關係，得到正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係式，即可推得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEG 與三角形 ABC 全等，並由此說明 $F-G-E$ 三點共線：

   因為 $\angle EAG+\angle BAG=90°$，$\angle CAB+\angle BAG=90°$，所以 $\angle EAG=\angle CAB$，因為前述 $\angle EAG=\angle CAB$，且 $\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   由上述結論可知 $\angle AGE=\angle ACB=90°$，因此可推論 $F-G-E$ 三點共線。
2. 證明三角形 BDI 與三角形 ABC 全等：

   因為 $\angle ABC+\angle DBI=90°=\angle ABC+\angle BAC$，得 $\angle DBI=\angle BAC$，且 $\overline{BD}=\overline{AB}$，$\overline{BI}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta BDI\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   由此可知 $\angle FID=90°$，且 $\overline{ID}=\overline{BC}$.

3. 證明三角形 EDJ 與三角形 ABC 全等：

因為 $\angle AEG+\angle JED=90°=\angle AEG+\angle EAG$ 且由第 1 點可推得 $\angle JED=\angle CAB$，因為 $\angle EJD=90°=\angle ACB$，$\overline{ED}=\overline{AB}$，及前述 $\angle JED=\angle CAB$，所以

$$\Delta EDJ\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

由此可知 $\overline{JD}=\overline{BC}$，結合第 2 點結論可說明作圖過程第 2 點中的正方形必過 D 點。

由以上結論綜合前述第 1, 2 點可得

$$\Delta AEG\cong\Delta EDJ\cong\Delta BDI\cong\Delta ABC.$$

4. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割為四區塊，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：

由圖形及第 3 點結論可知

$$\begin{aligned}\square ABDE&=AGHB+\Delta JDH+\Delta AEG+\Delta EDJ\\&=AGHB+\Delta JDH+\Delta BDI+\Delta ABC\\&=AGHB+\Delta JDH+\Delta BHF+HDIF+\Delta ABC\\&=(AGHB+\Delta BHF+\Delta ABC)+(\Delta JDH+HDIF)\\&=\square ACFG+\square DIFJ\ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE=\square ACFG+\square DIFJ.$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $DIFJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

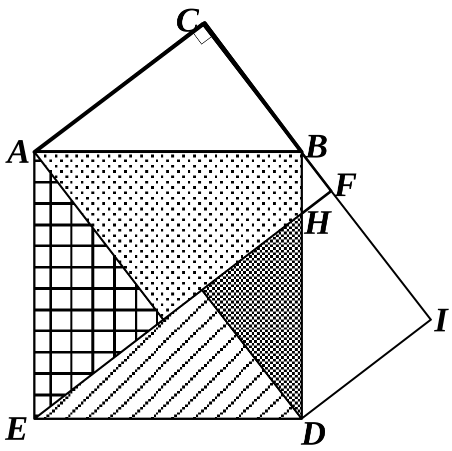
   Hill, G. A.(1886). *A Geometry for Beginners* (p.154). Boston: Ginn & Heath.

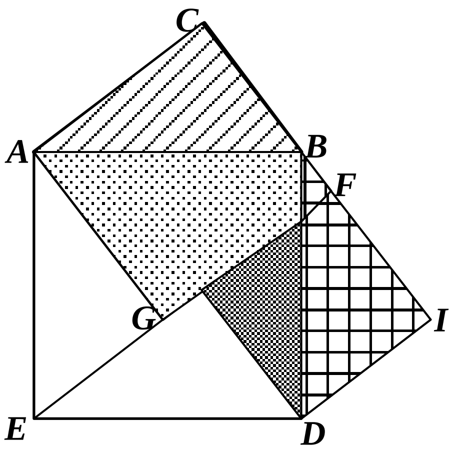
   Beman, Wooster Woodruff and Smith, David Eugene(1899). *New Plane and Solid Geometry(p.140)*. Boston : Ginn & company.

   Jan Versluys(1849). *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras* (p.22). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明運用圖形之間的全等關係去拼湊出三個正方形的關係，且可以運用拼圖方式讓學生體會勾股定理的背後的面積意義，圖形類似 G141，但相較之

下較容易也較能直觀的證明。拼圖方式如下：





3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●