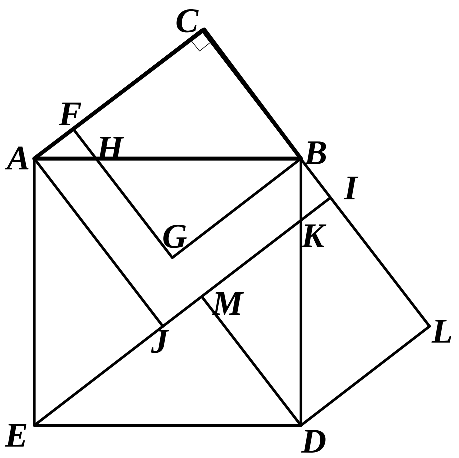
勾股定理證明-G141

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCFG$，其中$\overline{FG}$交$\overline{AB}$於H點，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACIJ$，其中$\overline{IJ}$交$\overline{BD}$於K點。
2. 延長$\overline{IJ}$到E點（於證明過程第 1 點中說明$E-J-I$三點共線）。
3. 延長$\overline{CI}$使$\overline{IL}=\overline{BC}$，連接$\overline{DL}$，從$D$點作$\overline{DM}$垂直$\overline{IE}$。



【求證過程】

　　如圖將正方形$ABDE$分割成五個區塊，先證明圖形中三角形之間的全等關係，利用全等關係及圖形的分割，可得正方形$ABDE$與另外兩個正方形的的關係，即得勾股定理關係式。

1. 證明作圖結果中若干個三角形與三角形ABC全等：

   因為$\angle BAC+\angle ABC=90°=\angle DBL+\angle ABC$，所以$\angle DBL=\angle BAC$；因為$\overline{IL}=\overline{BC}$，所以$\overline{BL}=\overline{IL}+\overline{BI}=\overline{BC}+\overline{BI}=\overline{CI}$，推得$\overline{BL}=\overline{AC}$，因為$\overline{BD}=\overline{AB}$及前述$\angle DBL=\angle BAC$，$\overline{BL}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta BDL\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)};$$

   因為四邊形$DMIL$內角皆為直角，且$\overline{IL}=\overline{BC}=\overline{DL}$，所以四邊形$DMIL$是邊長為$\overline{BC}$的正方形，推得$\overline{MD}=\overline{BC}$；因為$\overline{MD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，所以$\angle EDM=\angle ABC$，因為前述

$\overline{MD}=\overline{BC}$，$\angle EDM=\angle ABC$ 及 $\overline{AB}=\overline{DE}$，所以

$$\Delta EDM\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)};$$

因為 $\angle EAJ+\angle BAJ=90^\circ$ 且 $\angle CAB+\angle BAJ=90^\circ$，所以 $\angle EAJ=\angle BAC$，因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$，

$\overline{AJ}=\overline{AC}$ 及前述 $\angle EAJ=\angle BAC$，所以

$$\Delta AEJ\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

因此可得 $\angle AJE=\angle ACB=90^\circ$，可推得 $E-J-I$ 三點共線；
綜合前述可得

$$\Delta BDL\cong\Delta EDM\cong\Delta AEJ\cong\Delta ABC.$$

2. 證明三角形 DKM 與三角形 BHG 全等：

 因為 $\overline{KM}\,//\,\overline{BG}$，所以 $\angle MKD=\angle GBD$，因為 $\angle MKD+\angle KDM=90^\circ=\angle GBD+\angle HBG$，

 且由前述 $\angle MKD=\angle GBD$，可得 $\angle KDM=\angle HBG$，由前述 $\angle KDM=\angle HBG$，且

 $\overline{MD}=\overline{BC}=\overline{BG}$，$\angle DMK=90^\circ=\angle BGH$ 可推得

$$\Delta DKM\cong\Delta BHG\text{ (ASA 全等)}.$$

3. 由前述兩點得到全等三角形並運用此結果推得三角形 BKI 與三角形 AHF 全等：
 因為第 1 點中 $\Delta BDL\cong\Delta ABC$，可知 $\angle DBL=\angle BAC$，因此 ΔBKI 中，$\angle KBI=\angle DBL=$

 $\angle BAC$，即 $\angle KBI=\angle HAF$；因為第 2 點中 $\Delta DKM\cong\Delta BHG$，可知 $\overline{KD}=\overline{BH}$，所以 $\overline{BK}=$

 $\overline{BD}-\overline{KD}=\overline{AB}-\overline{BH}=\overline{AH}$，即 $\overline{BK}=\overline{AH}$，

 因為由前述 $\angle KBI=\angle HAF$，$\overline{BK}=\overline{AH}$，且 $\angle AFM=90^\circ=\angle BIK$，所以可推得

$$\Delta BKI\cong\Delta AHF\text{ (AAS 全等)}.$$

4. 運用正方形 $ABDE$ 的圖形分割及前述全等圖形關係，拼湊得正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的圖形關係：

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\Delta EDM+\Delta DKM+\Delta AEJ+\Delta BHG+AJKBGH\\&=(\Delta BDL-\Delta BKI)+(\Delta BKI+AJKBGH)+\Delta DKM+\Delta AEJ+\Delta BHG\\&=(\Delta ABC-\Delta AHF)+AJIBGH+\Delta BHG+\Delta ABC+\Delta BHG\\&=(BCFH+\Delta BHG)+(AJIBGH+\Delta ABC+\Delta BHG)\\&=\square BCFG+\square ACIJ\ ,\end{aligned}$$

 即

$$\square ABDE=\square BCFG+\square ACIJ\ .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Reichenberger. Johann Nepomuk(1774). *Cursus Biennalis Philosophiae Et Matheseos Universae.* Ratisbonae : Montag.

   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(p. 29). Leipz.: Friese.
2. 心得：此證明運用圖形之間的全等關係進行圖形的拼湊，但因面積部分有重疊，所以較不適合讓學生用拼圖方式進行直觀的體驗活動，若是改變作圖方式，將圖中正方形 $BCFG$ 取代為圖中正方形 $DMIL$ ，則較適合用拼圖方式讓學生體會勾股定理，可參考 G165。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●