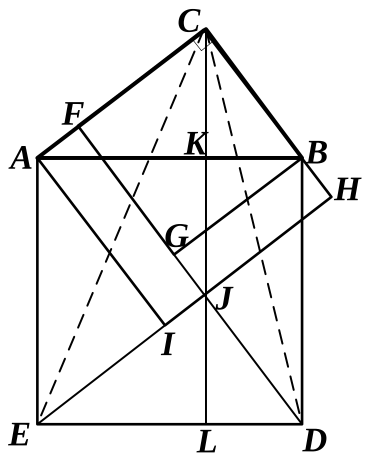
勾股定理證明-G140

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內做一正方形 $BCFG$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內做一正方形 $ACHI$ 。
2. 延長 $\overline{HI}$ 到 E 點；延長 $\overline{FG}$ 到 D 點並交 $\overline{HI}$ 於 J 點（補充：註①）。
3. 從 C 點作 $\overline{CL}$ 垂直 $\overline{DE}$ ，與 $\overline{AB}$ 交於 K 點，且 $C-J-L$ 三點共線（補充：註②）。
4. 連接 $\overline{CE}$，$\overline{CD}$ 。



【求證過程】

將正方形 $ABDE$ 面積視為兩長方形的和，證明兩長方形面積分別等於圖形中兩平行四邊形，再將平行四邊形面積作分割利用圖形間等底同高則面積相等的性質，整理正方形面積關係式，進一步得勾股定理關係式。

1. 運用等底同高則面積相等的性質說明平行四邊形面積與矩形面積相等：
   因為 $\overline{BD}$ 為平行四邊形 $BDJC$ 的一邊，$\overline{DL}$ 為 $\overline{BD}$ 上的高，所以

$$\square BDJC = \overline{BD} \times \overline{DL} = \square BDLK\,;$$

   因為 $\overline{AE}$ 為平行四邊形 $AELK$ 的一邊，$\overline{EL}$ 為 $\overline{AE}$ 上的高，所以

$$\square AEJC = \overline{AE} \times \overline{EL} = \square AELK\,.$$

2. 運用平行四邊形可分割為兩個三角形去計算面積可得其與正方形面積相等：
   因為 $\overline{CD}$ 為平行四邊形 $BDJC$ 的對角線，所以 $BDJC = 2\Delta BDC$，且因為 ΔBCD 面積=

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BG}$, 所以

$$\square BDJC = 2\times\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BG} = \overline{BC}\times\overline{BG} = \square BCFG .$$

3. 同理，因為 $\overline{CE}$ 為平行四邊形 $AEJC$ 的對角線，所以 $\square AEJC = 2\Delta ACE$, 且因為 $\Delta ACE = \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AI}$, 所以

$$\square AEJC = 2\times\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AI} = \overline{AC}\times\overline{AI} = \square ACHI .$$

4. 運用正方形 $ABDE$ 的分割及圖形間的面積關係整理出正方形 $ABDE$ 與正方形 $BCFG$ 與正方形 $ACHI$ 的關係：
   由圖形及 1, 2 點可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDLK + \square AELK\\ &= \square BDJC + \square AEJC\\ &= \square BCFG + \square ACHI \ ,\end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square ACHI .$$

5. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：
   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$, 正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$,
   所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   J. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(p. 12). Leipz.: Friese.
2. 心得：圖形與 G137 類似，差別在於 G137 直接藉由平行四邊形面積證明，此證明則另外多做了兩條輔助線，比 G137 多一個步驟，利用平行四邊形可分解為兩個全等三角形的性質去證明，證明手法同樣是運用兩圖形等底同高的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充(補證性質)

註①：

因為$\angle CAB+\angle BAI=90°$，$\angle EAI+\angle BAI=90°$，所以$\angle EAI=\angle CAB$. 因為$\overline{AI}=\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{AB}$及前述$\angle EAI=\angle CAB$，所以

$$\Delta AEI\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等})$$

推得$\angle AIE=\angle ACB=90°$，因此$\angle AIE+\angle AIH=180°$,所以$H-I-E$三點共線，即$E$點會在$\overline{HI}$的延長線上；

類似上述證明過程可推得D點會在$\overline{FG}$的延長線上。

註②：

因為$\overline{CH}=\overline{AC}$，$\overline{HJ}=\overline{BC}$，且$\angle CHJ=90°=\angle ACB$ 所以

$$\Delta CJH\cong\Delta ABC\quad(\text{SAS}),$$

可得$\angle HCJ=\angle CAB$，即$\angle BCJ=\angle CAB$，因為由圖形及$\angle BCJ=\angle CAB$可知$\angle CBD+\angle BCJ=\angle CBA+\angle ABD+\angle BCJ=90°+\angle CBA+\angle CAB=180°$，所以由平行線判別性質可得$\overline{CJ}//\overline{BD}$，且因為$\overline{CL}\perp\overline{DE}$，即$\overline{CL}//\overline{BD}$，所以$C-J-L$三點共線。