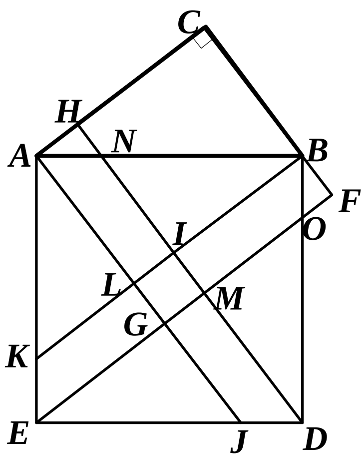
勾股定理證明-G139

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCHI$。
2. 延長$\overline{AG}$交$\overline{DE}$於J點，延長$\overline{BI}$交$\overline{AE}$於K點，交$\overline{BK}$於L點。
3. 連接$\overline{DI}$，交$\overline{FG}$於M點（由證明第 2 點說明$H-I-D$三點共線）。
4. 連接$\overline{EG}$（由證明第 1 點說明$E-G-F$三點共線）。
5. $\overline{AB}$交$\overline{HI}$於N點。



【求證過程】

證明正方形$ABDE$內部中有若干個三角形及四邊形全等，將正方形$ABDE$面積跟據作圖結果分割數塊後，利用圖形之間的全等關係，整理出勾股定理關係式。

1. 證明三角形AEG與三角形ABC全等，再說明$E-G-F$三點共線：

   因為$\angle CAB+\angle BAG=90^\circ$，$\angle GAE+\angle BAG=90^\circ$，所以$\angle GAE=\angle CAB$，因為$\overline{AB}=\overline{AE}$，

   $\overline{AG}=\overline{AC}$，及前述$\angle GAE=\angle CAB$，所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   因為由上述結論知$\angle AGE+\angle AGF=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，所以推得$E-G-F$三點共線。
2. 證明三角形DBI與三角形ABC全等，再說明$H-I-D$三點共線：

   因為$\angle CBA+\angle ABI=90^\circ$，$\angle DBI+\angle ABI=90^\circ$，所以$\angle DBI=\angle ABC$，因為$\overline{BD}=\overline{AB}$，

$\overline{BI}=\overline{BC}$，及前述 $\angle DBI=\angle ABC$，所以

$$\Delta DBI\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}),$$

因為由上述結論可知 $\angle BID+\angle BIH=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，所以推得 $H-I-D$ 三點共線。

3. 利用線段之間的平行與等長關係，說明四邊形 $GMIL$ 為正方形：

   因為四邊形 $GMIL$ 兩雙對邊互相平行，內角皆為直角，且四個邊長皆為 $\left(\overline{AC}-\overline{BC}\right)$，

   所以可得四邊形 $GMIL$ 為一正方形。

4. 說明三角形 ANH 全等於三角形 BOF：

   因為 $\angle HAN+\angle ABC=90^\circ$，$\angle FBO+\angle ABC=90^\circ$，所以 $\angle HAN=\angle FBO$，因為前述

   $\angle FBO=\angle HAN$ 且 $\overline{AH}=\overline{BF}$，$\angle AHN=90^\circ=\angle BFO$，所以

$$\Delta ANH\cong\Delta BOF\,(\text{ASA 全等}).$$

5. 先證明四邊形 $BOEK$ 與四邊形 $ANDJ$ 為平行四邊形，再利用第 4 點結論得到邊長相等關係，進一步說明正方形 $ABDE$ 中若干個三角形全等：

   因為 $\overline{BK}\,//\,\overline{OE}$，$\overline{BO}\,//\,\overline{KE}$，所以 $BOKE$ 為一平行四邊形，因為 $\overline{AJ}\,//\,\overline{ND}$，$\overline{AN}\,//\,\overline{JD}$，所以

   $ANDJ$ 為一平行四邊形；

   因為四邊形 $BOKE$ 及四邊形 $ANDJ$ 皆為平行四邊形，因此 $\overline{AN}=\overline{JD}$，$\overline{BO}=\overline{KE}$，再由

   第 4 點結論 $\Delta ANH\cong\Delta BOF$ 可知 $\overline{AN}=\overline{BO}$，所以可進一步得到

$$\overline{AN}=\overline{BO}=\overline{DJ}=\overline{EK},$$

   且因為四邊形 $ABDE$ 為一正方形，所以

$$\overline{BN}=\overline{DO}=\overline{EJ}=\overline{AK};$$

   因為 $\overline{BK}\,//\,\overline{EO}$，$\overline{AE}\,//\,\overline{BD}$，所以 $\angle AKL=\angle DOM$，且因為 $\angle ALK=90^\circ=\angle DMO$，及前述

   $\overline{AK}=\overline{DO}$，所以

$$\Delta AKL\cong\Delta DOM\,(\text{AAS 全等});$$

   因為 $\overline{BK}\,//\,\overline{EO}$，$\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$，所以 $\angle NBI=\angle JEG$，且因為 $\angle BIN=90^\circ=\angle EGN$，及前述

   $\overline{BN}=\overline{EJ}$，所以

$$\Delta BNI\cong\Delta EJG\,(\text{AAS 全等});$$

   因為在三角形 ABK 中 $\angle NBI+\angle AKL=90^\circ$，且在三角形 ALK 中 $\angle LAK+\angle AKL=90^\circ$，所以 $\angle NBI=\angle LAK$，因為 $\angle NBI=\angle LAK$，$\angle BIN=90^\circ=\angle ALK$，$\overline{BN}=\overline{AK}$，所以

$$\Delta BNI \cong \Delta AKL \quad \text{(AAS 全等)},$$

綜合前述可得

$$\Delta AKL \cong \Delta BNI \cong \Delta DOM \cong \Delta EJG .$$

6. 證明正方形 $ABDE$ 分割圖形中的四個梯形全等：

   因為第 5 點結論 $\Delta AKL \cong \Delta BNI \cong \Delta DOM \cong \Delta EJG$，可知 $\overline{KL}=\overline{MO}$，$\overline{EG}=\overline{BI}$，且因為 $\overline{LG}=\overline{IM}$，$\overline{EK}=\overline{BO}$ 且梯形 $EGLK$，梯形 $BIMO$ 的內角均分別相等，所以可得

   $$EGLK \cong BIMO,$$

   同理，類似上述證明過程可得

   $$ALIN \cong DMGJ \cong EGLK \cong BIMO .$$

7. 將正方形 $ABDE$ 的分割做拼湊，利用圖形間的全等關係找出正方形 $ABDE$ 與 $BCHI$，$ACFG$ 的關係：

   由圖形及前述圖形全等證明結論可知

   $$\begin{aligned}\square ABDE &= 4\Delta AKL+4EGLK+\square IMGL\\ &= 4\Delta AKL+4EGLK+\square IMGL+\Delta AHN-\Delta AHN\\ &= (2\Delta AKL+3EGLK+\square IMGL+\Delta AHN)+(2\Delta AKL+EGLK-\Delta AHN)\ ,\end{aligned}$$

   上式左邊括號可由前述圖形全等證明結論改寫成：

   $$\begin{aligned}&2\Delta AKL+3EGLK+\square IMGL+\Delta AHN\\ &=\Delta AKL+\Delta BNI+EGLK+IBOM+ALNI+\square IMGL+\Delta BFO\\ &=(\Delta AKL+EGLK)+(\Delta BNI+IBOM+\Delta BFO+ALNI+\square IMGL)\\ &=\Delta AEG+ABFG\\ &=\Delta ABC+ABFG\\ &=\square ACFG\ ;\end{aligned}$$

   上式右邊括號可由前述圖形全等證明結論改寫成：

   $$\begin{aligned}&2\Delta AKL+EGLK-\Delta AHN\\ &=\Delta BNI+\Delta DOM+MOBI-\Delta AHN\\ &=\Delta BNI+\Delta DBI-\Delta AHN\\ &=\Delta BNI+\Delta ABC-\Delta AHN\\ &=\square BCHI\ ;\end{aligned}$$

   綜合以上三個部分，可知

   $$\square ABDE=\square BCHI+\square ACFG$$

8. 整理第 7 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 6 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(p.29). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明的輔助圖分割成較多部分，因此需要證明較多圖形之間的全等關係，雖然作圖並不複雜，但不容易藉由圖形的全等，讓學生直觀的用拼湊的方式體會到三個正方形的面積關係，

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				●