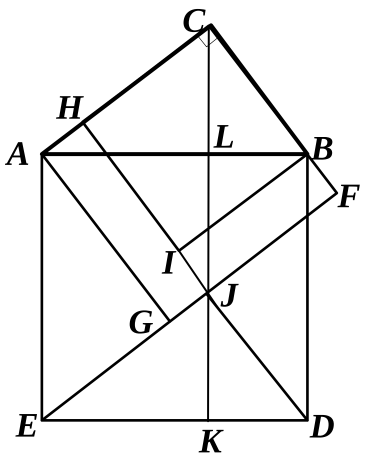
勾股定理證明-G137

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCHI$。
2. 延長$\overline{FG}$到E點（G135 第 1 點說明$E-G-F$三點共線）；延長$\overline{HI}$到D點，並與$\overline{FG}$交於J點 （補充：註①）。
3. 連接$\overline{CJ}$，從C點作$\overline{BD}$的平行線交$\overline{DE}$於K點，與$\overline{AB}$交於L點，且$C-J-K$三點共線（補充：註②）。



【求證過程】

利用圖形的分割將正方形$ABDE$視為圖形中兩矩形的和，證明兩矩形面積分別與圖形中平行四邊形且與圖形中正方形面積相等，運用此關係整理正方形$ABDE$面積，可得勾股定理關係式。

1. 運用作圖過程可說明四邊形$BCJD$與四邊形$ACJE$為平行四邊形：

   因為$\overline{CK}//\overline{BD}$，$\overline{JD}$在$\overline{HI}$的延長線上，所以$\overline{CJ}//\overline{BD}$，$\overline{JD}//\overline{BC}$，因此可知四邊形$BCJD$為一平行四邊形；同理，因為$\overline{AC}//\overline{EJ}$，$\overline{AE}//\overline{EJ}$，所以四邊形$ACJE$為一平行四邊形。
2. 運用圖形間等底同高則面積相等的關係，說明圖形中平行四邊形面積與長方形面積相等：

   因為$\overline{CJ}//\overline{BD}$，即$\overline{CJ}\perp\overline{AB}$，可推得$\overline{BL}\perp\overline{CJ}$，因此$\overline{BL}$為平行四邊形$BCJD$的高；同理,

   $\overline{AL}$為平行四邊形$ACJE$的高，因此可得

$$\square BCJD = \overline{BD} \times \overline{BL} = \square BDKL;$$

及

$$\square ACJE = \overline{AE} \times \overline{AL} = \square AEKL.$$

3. 運用圖形間等底同高則面積相等的關係，說明圖形中平行四邊形面積與正方形面積相等：

   如圖，因為 $\overline{CF} \perp \overline{JF}$，所以

   $$\square BCJD = \overline{CB} \times \overline{JF} = \overline{CB} \times \overline{CB} = \square BCHI,$$

   同理，因為 $\overline{HJ} \perp \overline{AC}$，所以

   $$\square ACJE = \overline{AC} \times \overline{HJ} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \square ACFG.$$

4. 由前述幾點面積關係整理出正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係式：
   由圖形及第 2, 3 點結論可得

   $$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDKL + \square AEKL \\ &= \square BCJD + \square ACJE \\ &= \square BCHI + \square ACFG\end{aligned}$$

   即

   $$\square ABDE = \square BCHI + \square ACFG.$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 7 點結論可推得

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.158). New York : Macmillan and co..
   Benj. F. Yanney and James, A. (1898). New and Old Proofs of the Pythagorean

Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(3), 3.

2. 心得：此證明圖形與 G134, G135 類似，差別在於在此 $\overline{CK}$ 為垂線，導致雖然圖形類似但證明手法不同，此證明是運用圖形等底同高則面積相同的概念，不同於 G134, G135 是運用圖形的分割。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充(補證性質)

註①：

因為 $\overline{BI}=\overline{BC}$, $\angle IBD=\angle CBA$, $\overline{BD}=\overline{AB}$, 所以

$$\Delta DBI \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

因為由上述可推得 $\angle BID=90°$, 所以 $\angle BIH+\angle BID=180°$, 推得 $D-H-I$ 三點共線。

註②：

因為 $\overline{CF}=\overline{AC}$, $\overline{FJ}=\overline{CH}=\overline{BC}$, $\angle CFJ=90°=\angle ACB$, 所以

$$\Delta CJF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

可得 $\angle FCJ=\angle CAB$, 即 $\angle BCJ=\angle CAB$. 由圖形及 $\angle BCJ=\angle CAB$, 可知 $\angle CBD+\angle BCJ=\angle CBA+\angle ABD+\angle CAB=90°+\angle CBA+\angle CAB=180°$, 因此由平行線判別性質可知 $\overline{CJ}\,//\,\overline{BD}$, 且因為 $\overline{CK}\,//\,\overline{BD}$, 所以 $C-J-K$ 三點共線。