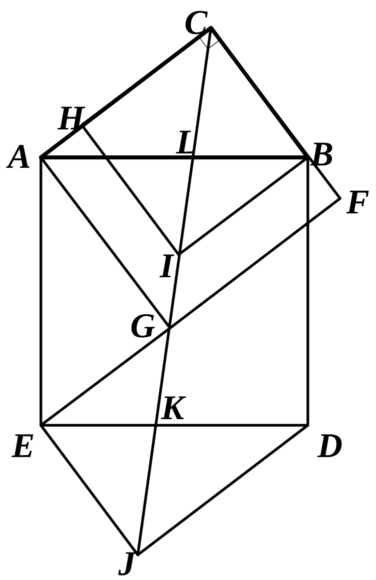
勾股定理證明-G136

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $BCHI$ 。
2. 從 E 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，從 D 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，兩者交於 J 點，形成 $\overline{EJ}$, $\overline{DJ}$ 。
3. 連接 $\overline{CJ}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 K 點，與 $\overline{AB}$ 交於 L 點。
4. 連接 $\overline{EG}$（由 G135 證明第 1 點可知 $F-G-E$ 三點共線）。



【求證過程】

由作圖過程將正方形 $ABDE$ 視為外圍六邊形扣除兩個三角形，說明圖形中某些分割部分全等後，可將再正方形 $ABDE$ 面積改寫整理關係式，可推得勾股定理。

1. 證明三角形 DEJ 全等於三角形 ABC ，再運用此結果證明三角形 DJK 全等於三角形 ACL ，及三角形 EJK 全等於三角形 BCL ：

   因為 $\overline{EJ} // \overline{BC}$, $\overline{DJ} // \overline{AC}$ 且 $\overline{AB} // \overline{DE}$, 及由圖形可知 $\angle DEJ = \angle CAB$, $\angle JED = \angle CBA$,

   所以由前述 $\angle DEJ = \angle CAB$, $\angle JED = \angle CBA$ 及 $\overline{DE} = \overline{AB}$ 得

   $$\Delta DEJ \cong \Delta ABC \quad \text{(ASA 全等)},$$

   由此可知 $\overline{DJ} = \overline{AC}$, $\angle KDJ = \angle LAC$, 且由 G135 的證明過程第 2 點可知 $\overline{DK} = \overline{AL}$, 所以

$$\Delta DJK \cong \Delta ACL \quad \text{(SAS 全等)},$$

同理，

$$\Delta EJK \cong \Delta BCL \quad \text{(SAS)}.$$

2. 運用圖形之間的相等關係，說明六邊形 $AEJDBC$ 面積相當於四邊形 $AEJC$ 面積的兩倍：

   由 G135 的證明過程第 2 點可

   $$\text{四邊形 } AEKL \cong \text{四邊形 } DBLK,$$

   從圖形可得

   $$\text{四邊形 } AEJC = \Delta ACL + AEKL + \Delta EJK,$$

   因為由第 1 點中 $\Delta DJK \cong \Delta ACL$, $\Delta EJK \cong \Delta BCL$ 及前述四邊形$AEKL \cong$四邊形$DBLK$, 可將四邊形 $AEJC$ 改寫為

   $$AEJC = \Delta DJK + DBLK + \Delta BCL = DBCK,$$

   由圖形及上述 $AEJC = DBCJ$, 可得

   $$AEJDBC = AEJC + DBCJ = 2AEJC.$$

3. 運用全等三角形對應邊相等性質得到三角形 JEG 與三角形 CBI 的全等關係，並運用此結果說明正方形 $BCHI$ 面積相當於兩倍的三角形 EJG ：

   因為第 1 點中的 $\Delta DEJ \cong \Delta ABC$ 可知 $\overline{EJ} = \overline{BC}$ ；由 G135 的證明過程第 1 點中得

   $\Delta AEG \cong \Delta ABC$, 可知 $\overline{EG} = \overline{BC}$, 且因為 $\overline{BI} = \overline{BC}$, 所以 $\overline{EG} = \overline{BI}$,

   因為前述 $\overline{EJ} = \overline{BC}$, $\overline{EG} = \overline{BI}$ 及 $\angle GEJ = \angle CBI = 90°$, 所以

   $$\Delta JEG \cong \Delta CBI \text{ (SAS 全等)},$$

   因此，由圖形及前述可得

   $$2\Delta EJG = 2\Delta CBI = \square BCHI.$$

4. 由圖形及前述三點結論整理正方形 $ABDE$ 與正方形 $BCHI$ 及正方形 $ACFG$ 的關係：

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= AEJDBC - \Delta ABC - \Delta DEJ \\
&= AEJDBC - 2\Delta ABC \\
&= 2AEJC - 2\Delta ABC \\
&= 2(\Delta AEG + \Delta EJG + \Delta CGA) - 2\Delta ABC \\
&= 2\Delta AEG + 2\Delta EJG + 2\Delta CGA - 2\Delta ABC \\
&= 2\Delta AEG + \square BCHI + \square ACFG - 2\Delta ABC \\
&= \square BCHI + \square ACFG,
\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square BCHI + \square ACFG.$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 8 月 1 日想到的。
2. 心得：此證明圖形與 G135 十分類似，差異僅有一個全等三角形的作圖位置不同，證明方式運用了圖形的全等關係，由分割部分同樣無法完全用拼圖方式完成三個正方形的關係，必須搭配代數式子，以最外圍圖形去扣除部分區塊得到三個正方形關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	