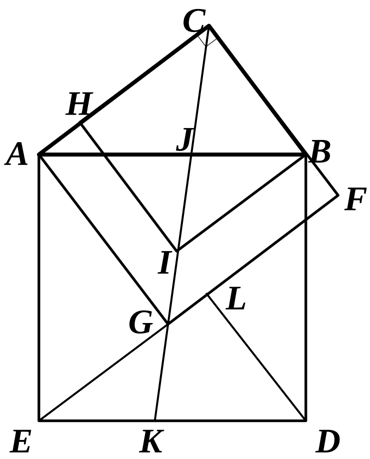
勾股定理證明-G135

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCHI$。
2. 連接$\overline{EG}$，且$E-G-F$三點共線（於證明過程第 1 點說明）。
3. 連接$\overline{CG}$並延長$\overline{CG}$，與$\overline{AB}$交於J點，與$\overline{DE}$交於K點，且過I點。
4. 從D點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{FG}$於L點。



【求證過程】

由圖形的分割將正方形$ABDE$視為兩梯形的和，利用三角形的全等去說明前述兩梯形全等，再運用梯形在圖形上的分割及三角形的全等關係，可推得正方形$ABDE$與另外兩個正方形的面積關係，即勾股定理關係式。

1. 說明三角形AEG全等於三角形ABC，藉此推得$E-G-F$三點共線：

   因為$\angle EAG+\angle GAB=90°$，$\angle CAB+\angle GAB=90°$，所以$\angle EAG=\angle BAC$，因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，

   $\overline{AG}=\overline{AC}$，及前述$\angle EAG=\angle BAC$，所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

   由上述結論可推得$\angle AGE=90°$，因此$\angle AGE+\angle AGF=180°$，即$E-G-F$三點共線。
2. 先證明三角形EGK與三角形BIJ全等，再利用全等三角形對應邊長關係說明四邊形$AEKJ$與四邊形$DEJK$全等：

   因為$\overline{AB}//\overline{DE}$，且$\overline{BI}//\overline{GE}$，所以$\angle GEK=\angle IBJ$，$\angle GKE=\angle IJB$；由第 1 點結論

   $\Delta AEG\cong\Delta ABC$，可推得$\overline{EG}=\overline{BC}=\overline{BI}$，因為前述$\angle GKE=\angle IJB$及$\angle GEK=\angle IBJ$，

$\overline{EG} = \overline{BI}$ 可得

$$\Delta EGK \cong \Delta BIJ \text{ (AAS 全等)},$$

由上述 $\Delta EGK \cong \Delta BIJ$，推得 $\overline{BJ} = \overline{EK}$，進一步得 $\overline{AJ} = \overline{DK}$. 由前述 $\overline{AJ} = \overline{DK}$ ，及四邊形 $AEKJ$ 與四邊形 $DBJK$ 的其餘對應邊與對應角度皆相同，所以

$$\text{四邊形 } AEKJ \cong \text{四邊形 } DBJK .$$

3. 由圖形將正方形 $ABDE$ 重新拼湊可得：

$$\square ABDE = AEKJ + DBJK ,$$

由第 2 點結論 $AEKJ \cong DBJK$ 可進一步將上式改寫為

$$\begin{aligned}\square ABDE &= 2AEKJ \\ &= 2(\Delta AGJ + \Delta AEG + \Delta EGK) \ ,\end{aligned}$$

再由第 1, 2 點可將前式改寫為

$$\begin{aligned}\square ABDE &= 2(\Delta AGJ + \Delta ABC + \Delta BIJ) \\ &= 2(\Delta AGJ + \Delta ACJ + \Delta BCJ + \Delta BIJ) \\ &= 2(\Delta AGJ + \Delta ACJ + 2(\Delta BCJ + \Delta BIJ) \\ &= \square ACFG + \square BCHI\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square BCHI + \square ACFG .$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead. New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem**.** *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 74.
2. 心得：此證明的圖形分割，雖然是運用圖形之間的全等關係，但無法完全直接將斜邊為邊長的正方形分割部分，移動到以兩股為邊長的正方形圖形，必須另外

搭配代數式子，才可得到勾股定理關係。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●