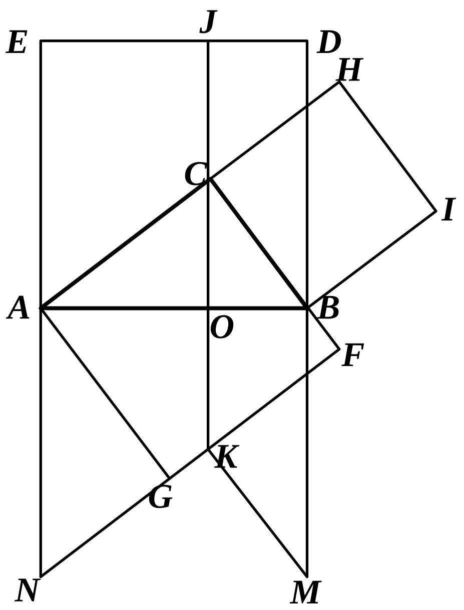
勾股定理證明-G126

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCHI$。
2. 過C點作$\overline{BD}$的平行線，交$\overline{DE}$於J點，交$\overline{FG}$於K點，且交$\overline{AB}$於O點。
3. 延長$\overline{DB}$到M點，使$\overline{BM}=\overline{CK}$，連接$\overline{KM}$。
4. 延長$\overline{EA}$到N點，使$\overline{AN}=\overline{CK}$，連接$\overline{GN}$（於證明過程第一點說明$G-N-K$三點共線）。



【求證過程】

由圖形的分割將正方形$ABDE$視為兩矩形之和，證明此兩矩形面積分別與另外兩平行四邊形面積相等，再說明前述平行四邊形面積與圖形中另外兩個正方形面積相等，根據前述關係整理正方形$ABDE$面積式，即可推得勾股定理關係式。

1. 運用圖形的邊角關係說明三角形CKF全等於三角形ABC：
   因為$\angle FCK+\angle CBO=90^\circ$，$\angle CAB+\angle CBO=90^\circ$，所以$\angle FCK=\angle CAB$. 因為前述
   $\angle FCK=\angle CAB$且由$\overline{CF}=\overline{AC}$，$\angle CFK=90^\circ=\angle ACB$，所以可得
   $$\Delta CKF\cong\Delta ABC\ (\text{ASA 全等}),$$
   由此可推得$\overline{FK}=\overline{BC}$，$\overline{CK}=\overline{AB}$，且因為$\overline{AB}=\overline{BD}$，所以$\overline{CK}=\overline{BD}$.

2. 由三角形的全等關係，說明 $G-N-K$ 三點共線：
因為 $\angle BAC+\angle BAG=90^\circ=\angle NAG+\angle BAG$，可推得 $\angle NAG=\angle BAC$，由前述及

$\overline{AN}=\overline{CK}=\overline{BD}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta ANG\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

因此可推得 $\angle AGN+\angle AGF=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，即 $G-N-K$ 三點共線。

3. 說明四邊形 $BCKM$ 與四邊形 $ACKN$ 為平行四邊形並計算其面積：

因為 $\overline{BM}=\overline{CK}$ 且 $\overline{BM}\,//\,\overline{CK}$，所以四邊形 $BCKM$ 為一平行四邊形；同理，因為 $\overline{AN}=\overline{CK}$ 且 $\overline{AN}\,//\,\overline{CK}$，所以四邊形 $ACKN$ 為一平行四邊形。在平行四邊形 $BCKM$ 中，因為 $\overline{CK}\perp\overline{AB}$，所以

$$\square BCKM=\overline{CK}\times\overline{BO};$$

同理，

$$\square ACKN=\overline{CK}\times\overline{AO}.$$

4. 運用前述兩點的結果證明，矩形 $BDJO$ 與矩形 $AEJO$ 面積分別與平行四邊形 $BCKM$ 與平行四邊形 $ACKN$ 相等：

因為四邊形 $BDJO$ 為一矩形，且由第 3 點可知 $\overline{CK}=\overline{BD}$，所以 $\square BDJO=\overline{BD}\times\overline{BO}=\overline{CK}\times\overline{BO}$，因為由第 3 點可知 $\square BCKM=\overline{CK}\times\overline{BO}$，所以綜合前述可得

$$\square BDJO=\square BCKM;$$

同理，類似上述的證明過程可得

$$\square AEJO=\square ACKN.$$

5. 運用不同邊及其對應的高，計算平行四邊形 $BCKM$ 與平行四邊形 $ACKN$ 的面積：

因為平行四邊形 $BCKM$ 以 $\overline{BC}$ 為底邊，則高為 $\overline{FK}$，即 $\square BCKM=\overline{BC}\times\overline{FK}$，且由第 1 點可知 $\overline{FK}=\overline{BC}$，所以 $\square BCKM=\overline{BC}\times\overline{FK}=\overline{BC}\times\overline{BC}=\square BCHI$ ，即得

$$\square BCKM=\square BCHI;$$

同理，

$$\square ACKN=\square ACFG.$$

6. 由圖形及第 4, 5 點可整理正方形 $ABDE$ 的面積：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDJO + \square AEJO \\ &= \square BCKM + \square ACKN \\ &= \square BCHI + \square ACFG \ ,\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square BCHI + \square ACFG \,.$$

7. 整理第 6 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 6 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \,,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 1 日想到的。
2. 心得：此證明運用分割圖形中等底同高則面積相等的概念，說明三個正方形關係，此概念與 G123 相同，兩者圖形差異也不大，差別在兩個平行四邊形位置的鉛垂平移。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●