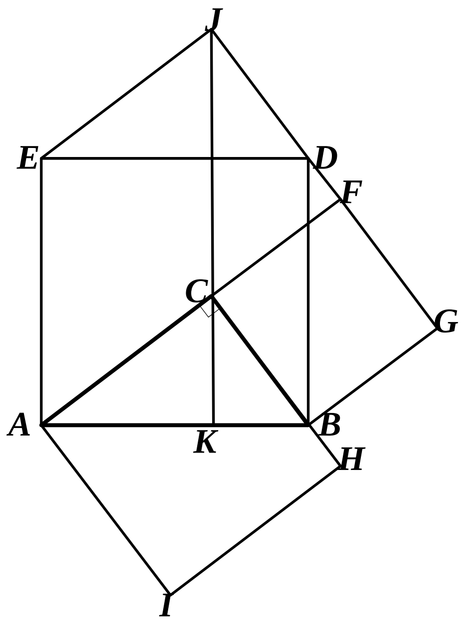
勾股定理證明-G123

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCFG$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACHI$。
2. 從E點作$\overline{AC}$的平行線，從D作$\overline{BC}$的平行線，且兩平行線交於J點。
3. 連接$\overline{CJ}$且延長$\overline{CJ}$交$\overline{AB}$於K點。
4. 連接$\overline{DF}$（由證明過程第3點說明$J-F-G$三點共線）。



【求證過程】

證明圖中三角形全等，則正方形$ABDE$的面積分割可視為兩平行四邊形之和，運用圖形的全等關係，說明這兩個平行四邊形面積與另外兩個正方形面積的關係，即可推得勾股定理關係式。

1. 說明三角形EDJ全等於三角形ABC：

   因為$\overline{EJ} // \overline{AC}$，$\overline{ED} // \overline{AB}$，所以$\angle DEJ = \angle BAC$；因為$\overline{DJ} // \overline{BC}$，$\overline{ED} // \overline{AB}$，所以

   $\angle EDJ = \angle ABC$. 因為由前述$\angle DEJ = \angle BAC$，$\angle EDJ = \angle ABC$，且$\overline{DE} = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta EDJ \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

2. 由上述結論及圖形關係說明$ACJE$與$BCJD$為平行四邊形：

   因為上述$\Delta EDJ \cong \Delta ABC$，推得$\overline{EJ} = \overline{AC}$，且因為$\overline{EJ} // \overline{AC}$，所以$ACJE$為平行四邊形；

類似上述證明過程可得 $BCJD$ 為平行四邊形。

3. 由圖形及上述結論說明三角形 JCF 全等於三角形 ABC ：

因為 $\angle FCJ+\angle BCK=90°$, $\angle CBA+\angle BCK=90°$, 所以 $\angle FCJ=\angle CBA$; 由第 2 點中四邊形 $ACJE$, $BCJD$ 皆為平行四邊形可推得 $\overline{JC}=\overline{AE}=\overline{AB}$. 由前述 $\angle FCJ=\angle CBA$,

$\overline{JC}=\overline{AB}$, 及 $\overline{CF}=\overline{BC}$ 可得

$$\Delta JCF\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

因此 $\angle CFJ=\angle ACB=90°$, 推得 $\overline{FJ}\,//\,\overline{BC}$, 且因為 $\overline{DJ}\,//\,\overline{BC}$ 所以得 $J-F-G$ 三點共線。

4. 由圖形的分割及相同圖形的不同面積表示法，說明正方形 $ABDE$ 的面積與平行四邊形面積的關係：

由圖形可知

$$\square ABDE=\Delta ABC+ACBDE,$$

因為 $\Delta EDJ\cong\Delta ABC$, 所以上式可改為

$$\square ABDE=ACBDJE$$

$$\square ABDE=\square ACJE+\square BCJD\ .$$

5. 說明平行四邊形 $BCJD$ 與平行四邊形 $ACJE$ 的面積，分別與正方形 $BCFG$ 與正方形 $ACHI$ 相等，並結合第 4 點說明正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係：

因為 $J-D-F$ 三點共線, 且 $\overline{BG}\perp\overline{JG}$, $\Delta EDJ\cong\Delta ABC$, 所以

$$\square BCJD=\overline{JD}\times\overline{BG}=\overline{BC}\times\overline{BG}=\square BCFG\ ;$$

同理，因為 $\Delta JCF\cong\Delta ABC$, 所以

$$\square ACJE=\overline{AC}\times\overline{FJ}=\overline{AC}\times\overline{AC}=\square ACHI\ .$$

將上述二式平行四邊形面積計算結果綜合第 4 點結論可得

$$\square ABDE=\square ACJE+\square BCJD$$

$$=\square ACHI+\square BCFG\ .$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$, 正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$,

所以由第 5 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 16 日想到的。
2. 心得：此證明運用分割圖形中等底同高則面積相等的概念，說明三個正方形關係，學生若有這樣的概念即能理解此類證明，藉由圖形應能對圖形中三個正方形的面積關係有直觀的想法。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	