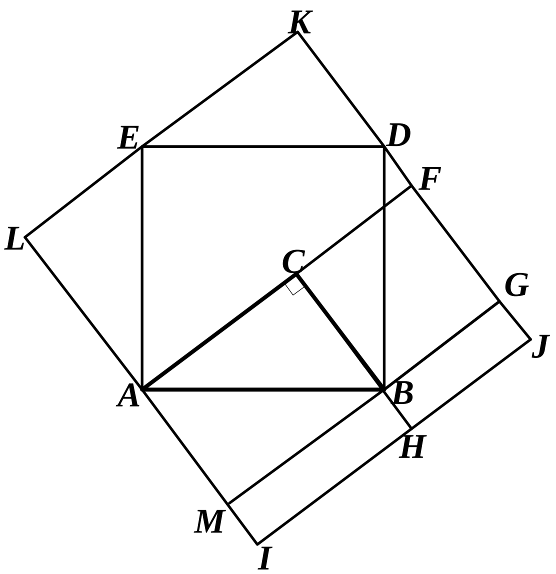
勾股定理證明-G122

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCFG$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACHI$ 。
2. 延長 $\overline{HI}$ 及 $\overline{FG}$ 交於 J 點。
3. 過 E 點作一直線平行於 $\overline{AC}$，並延長 $\overline{AI}$ 及 $\overline{FG}$ 與該直線分別交於 L 及 K 兩點。
4. 延長 $\overline{GB}$ 交 $\overline{AI}$ 於 M 點。



【求證過程】

將長方形 $IJKL$ 作出兩種不同分割，運用圖形之間的全等關係，比較兩種不同分割，即可推得勾股定理關係式。

1. 同前項 G121 的證明過程可說明圖形之間的全等關係：

$$\Delta BAM \cong \Delta AEL \cong \Delta EDK \cong \Delta DBG \cong \Delta ABC,$$

且

$$\text{矩形 } AFKL \cong \text{矩形 } AFJI .$$

2. 將矩形 $IJKL$ 面積用兩種不同方式分割，比較兩式：

利用第 1 點及圖形可知

$$\square IJKL = \square ABDE + \square GMIJ + 4\Delta ABC;$$

另外也可將長方形 $IJKL$ 改寫為

$$
\begin{aligned}
\square IJKL &= \square BCFG + \square ACHI + \square BGJH + \square AFKL \\
&= \square BCFG + \square ACHI + \square BGJH + \square AFJI \\
&= \square BCFG + \square ACHI + \square BGJH + \square BHIM + ACBM + CFJH \\
&= \square BCFG + \square ACHI + \square GMIJ + 4\Delta ABC \ ,
\end{aligned}
$$

比較上述兩種長方形 $IJKL$ 的表現式子可得

$$\square ABDE + \square GMIJ + 4\Delta ABC = \square BCFG + \square ACHI + \square GMIJ + 4\Delta ABC \ ,$$

即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square ACHI \ .$$

3. 整理 2 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 2 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Joh. Hoffmann (1821), *Der Pythagoräische Lehrsatz*, London: Henry Board.
   Jury. Wipper (1880) *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 21). Leipz.: Friese.
2. 心得：此證明的切割與 G121 完全相同，G121 是運用圖形全等拼湊，找三個正方形的面積關係，此證明 G122 則是比較外圍大長方形的不同拼接方式，做出三個正方形的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				