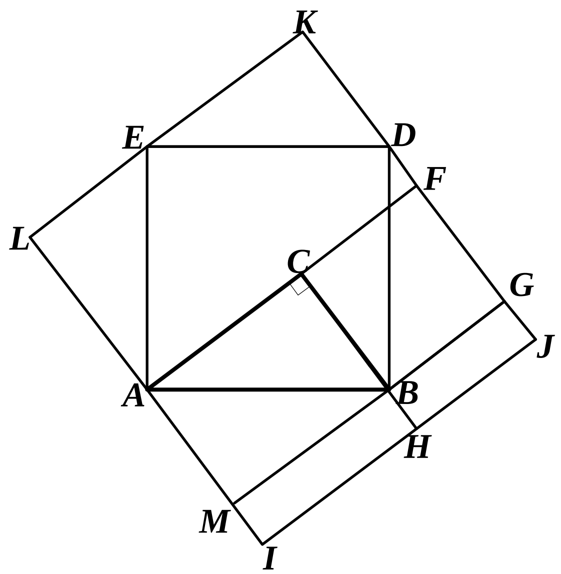
勾股定理證明-G121

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCFG$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACHI$ 。
2. 延長 $\overline{HI}$ 及 $\overline{FG}$ 交於 J 點。
3. 過 E 點作一直線平行於 $\overline{AC}$，並延長 $\overline{AI}$ 及 $\overline{FG}$ 與該直線分別交於 L 及 K 兩點。
4. 延長 $\overline{GB}$ 交 $\overline{AI}$ 於 M 點。



【求證過程】

證明圖中若干個三角形全等，運用圖形之間的關係，找出正方形 $ABDE$ 與圖中外圍最大矩形面積與的關係式，可推得勾股定理關係式。

1. 證明上圖中若干個三角形與三角形 ABC 全等：

由作圖過程可知 $\overline{BM}$ 為 $\overline{GB}$ 的延長，因此 $\overline{BM} // \overline{AC}$，可再推得 $\angle ABM = \angle CAB$； 因為 $\overline{AM} // \overline{BC}$，所以 $\angle BAM = \angle ABC$. 綜合前述因為 $\angle ABM = \angle CAB$, $\angle BAM = \angle ABC$, 及 $\overline{AB}$ 為 ΔBAM 及 ΔABC 的公共邊，所以可推得

$$\Delta BAM \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)};$$

因為 $\overline{AL}$ 為 $\overline{AI}$ 延長，所以 $\angle CAL = 90°$，因為 $\angle EAL + \angle EAC = 90°$， $\angle CAB + \angle EAC = 90°$

所以 $\angle EAL = \angle CAB$; 因為 $\overline{EL} // \overline{AC}$， $\overline{AL} // \overline{BC}$, 所以 $\overline{EL} \perp \overline{AL}$, 即 $\angle ALE = 90°$, 因此

$\angle ALE = \angle ACB$. 綜合前述，因為 $\angle EAL = \angle CAB$, $\angle ALE = \angle ACB$, 及 $\overline{AE} = \overline{AB}$ 所以

$$\Delta AEL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)};$$

類似上述的證明過程可證明

$$\Delta EDK \cong \Delta ABC \quad \text{及} \quad \Delta DBG \cong \Delta ABC,$$

因此綜合上述結果可得

$$\Delta BAM \cong \Delta AEL \cong \Delta EDK \cong \Delta DBG \cong \Delta ABC.$$

2. 說明外圍矩形 $IJKL$ 面積可視為矩形 $AFGM$ 與矩形 $GMIJ$ 面積和的兩倍：

因為由第 1 點結論可知 $\Delta AEL \cong \Delta ABC$, 推得 $\overline{AL} = \overline{AC}$, 且由 $\overline{AI} = \overline{AC}$, 所以推得

$$\overline{AL} = \overline{AI};$$

同樣的，由第 1 點結論可知 $\Delta AEL \cong \Delta ABC$, 及 $\Delta EDK \cong \Delta ABC$, 可推得 $\overline{EL} = \overline{BC}$ 及

$\overline{EK} = \overline{AC}$, 所以

$$\overline{KL} = \overline{EL} + \overline{EK} = \overline{BC} + \overline{AC},$$

因為 $\overline{HI} = \overline{AC}$, $\overline{HJ} = \overline{CF}$, 所以

$$\overline{IJ} = \overline{HJ} + \overline{HI} = \overline{CF} + \overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AC},$$

比較前述兩式可推得

$$\overline{KL} = \overline{IJ},$$

在 $AFKL$, $AFJI$ 中，因為相鄰兩邊皆垂直，所以 $AFKL$, $AFJI$ 皆為長方形, 且在此兩

長方形中, 因為前述 $\overline{AL} = \overline{AI}$ 及 $\overline{KL} = \overline{JI}$, 所以

$$\text{四邊形 } AFKL \cong \text{四邊形 } AFJI,$$

因此由圖形及上述可知：

$$\begin{aligned} \square IJKL &= \square AFKL + \square AFJI \\ &= 2\square AFJI \\ &= 2(\square AFGM + \square GMIJ). \end{aligned}$$

3. 運用最外圍矩形與正方形 $ABDE$ 的關係及前述 1, 2 點結論可得：

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \square IJKL - 4\Delta ABC - \square GMIJ \\
&= 2(\square AFGM + \square GMIJ) - 4\Delta ABC - \square GMIJ \\
&= 2\square \mathrm{AFGM} + \square \mathrm{GMIJ} - 4\Delta ABC \\
&= 2\square \mathrm{ACBM} + 2\square \mathrm{BCFG} + \square \mathrm{BMIH} + \square \mathrm{BGJH} - 4\Delta ABC \\
&= \square \mathrm{ACBM} + (\square \mathrm{ACBM} + \square \mathrm{BMIH}) + \square \mathrm{BCFG} + (\square \mathrm{BCFG} + \square \mathrm{BGJH}) - 4\Delta ABC \\
&= 2\Delta \mathrm{ABC} + \square \mathrm{ACHI} + \square \mathrm{BCFG} + 2\Delta ABC - 4\Delta ABC \\
&= \square \mathrm{BCFG} + \square \mathrm{ACHI}\ .
\end{aligned}
$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月 22 日想出來的，此外此證明也收錄在以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James (1898). A. New and Old Proofs of the Pythagorea Theorem, *The American Mathematical Monthly*, *5*(3), 74.
2. 心得：此證明運用外圍矩形的分割，寫出以斜邊為邊長的正方形與其他圖形的關係，運用圖形的全等及割補關係搭配運算可得勾股關係式，手法類 G120，但切割圖形不同，相較之下此圖形較 G120 簡易。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	