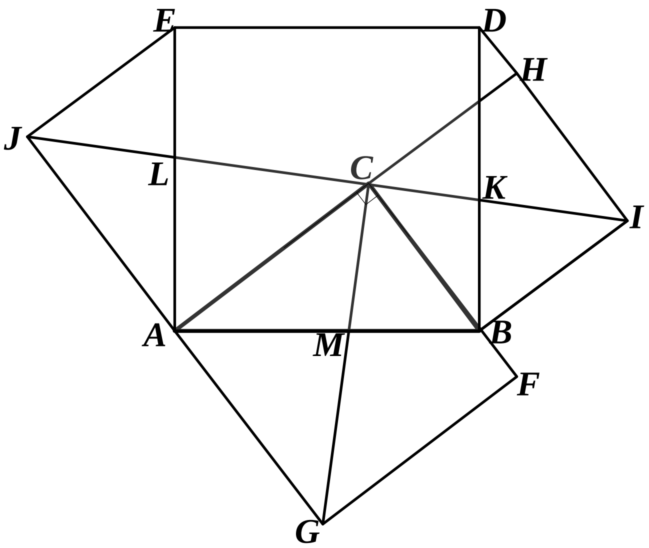
勾股定理證明-G120

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCHI$。
2. 連接$\overline{DH}$。
3. 從E點作$\overline{EJ}$平行$\overline{AC}$，且$\overline{EJ}=\overline{BC}$。
4. 連接$\overline{AJ}$。
5. 連接$\overline{IJ}$，分別交$\overline{BD}$, $\overline{AE}$於K點及L點，且C點在$\overline{IJ}$上(補充：註①)。
6. 連$\overline{CG}$交$\overline{AB}$於M點。



【求證過程】

如圖，將正方形$ABDE$分割為兩梯形，證明若干個三角形的全等，利用全等三角形對應邊相等，進而得到兩梯形全等，其中一個梯形由圖形分割可視為四個三角形的和，最後運用圖形的拼湊，可推得勾股定理關係式。

1. 運用正方形對角線與圖形關係說明三角形BCM全等於三角形BIK：

因為$\overline{CI}$為正方形$BCHI$的對角線所以$\angle BIK=45°$，因為$\overline{CG}$為正方形$ACFG$的對角線所以$\angle BCM=45°$，由前述$\angle BIK=45°$及$\angle BCM=45°$可得$\angle BIK=\angle BCM$；因為$\angle KBI+\angle KBC=90°$，$\angle MBC+\angle KBC=90°$，所以$\angle KBI=\angle CBM$.

因為根據前述$\angle BIK=\angle BCM$，$\angle KBI=\angle CBM$，及$\overline{BI}=\overline{BC}$，所以

$$\Delta BCM \cong \Delta BIK \text{ (ASA 全等)}.$$

2. 運用作圖過程說明三角形 AEJ 全等於三角形 DBI ：

   因為 $\overline{EJ} // \overline{BI}$， $\overline{AE} // \overline{BD}$，所以 $\angle AEJ = \angle DBI$，因為 $\overline{AE} = \overline{BD}$， $\overline{EJ} = \overline{BC} = \overline{BI}$ 及前述 $\angle AEJ = \angle DBI$，所以可得

$$\Delta AEJ \cong \Delta DBI \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 運用圖形間關係及第 2 點結論說明三角形 EJL 全等於三角形 BIK ：

   因為 $\overline{JL} // \overline{KI}$， $\overline{AE} // \overline{BD}$，所以 $\angle BKI = \angle ELJ$ ；因為 $\Delta AEJ \cong \Delta DBI$，所以 $\angle DBI = \angle AEJ$，

   $\overline{BI} = \overline{EJ}$，因為前述 $\angle BKI = \angle ENJ$， $\angle DBI = \angle AEJ$， $\overline{BI} = \overline{EJ}$，所以

$$\Delta EJL \cong \Delta BIK \text{ (AAS 全等)},$$

   再由第 1 點及前述結論可推得：

$$\Delta BIK \cong \Delta BCM \cong \Delta EJL .$$

4. 由圖形間關係及第 3 點結論說明三角形 ACL 全等於三角形 AGM ：

   因為 $\angle LAC + \angle CAM = 90°$， $\angle CAM + \angle MAG = 90°$，所以 $\angle LAC = \angle MAG$；因為第 3 點中 $\Delta BCM \cong \Delta EJL$，得 $\overline{BM} = \overline{EL}$，又因為 $\overline{AE} = \overline{AB}$，所以 $\overline{AL} = \overline{AE} - \overline{EL} = \overline{AB} - \overline{BM} = \overline{AM}$.

   因為前述 $\angle LAC = \angle MAG$， $\overline{AL} = \overline{AM}$，且 $\overline{AC} = \overline{AG}$，所以

$$\Delta ACL \cong \Delta AGM \text{ (SAS 全等)}.$$

5. 說明梯形 $ABKL$ 全等於梯形 $DELK$ ：

   因為梯形 $ABKL$， $DELK$ 中， $\overline{BK} = \overline{EL}$， $\overline{DK} = \overline{AL}$，且 $\overline{AB} = \overline{DE}$， $\overline{KL} = \overline{KL}$ 及兩梯型角度對應相等所以

$$\text{梯形 } ABKL \cong \text{梯形 } DELK .$$

6. 由圖形結合第 3, 4, 5 點可得：

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= ABKL + DELK \\
&= 2ABKL \\
&= 2(\Delta\mathrm{ACL} + \Delta\mathrm{ACM} + \Delta\mathrm{BCM} + \Delta\mathrm{CBK}) \\
&= 2(\Delta\mathrm{AGM} + \Delta\mathrm{ACM} + \Delta\mathrm{BIK} + \Delta\mathrm{CBK}) \\
&= 2(\Delta AGM + \Delta ACM) + 2(\Delta\mathrm{BIK} + \Delta\mathrm{CBK}) \\
&= \square ACFG + \square BCHI \ .
\end{aligned}$$

7. 整理第 6 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 6 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A (1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 74.
2. 心得：作圖過程中連接 $\overline{DH}$ 可省略；此證明的圖形分割，無法完全運用拼圖方式直接將以斜邊為邊長的正方形分割部分，移動到以兩股為邊長的正方形圖形裡，必須另外搭配代數式子，得到勾股定理關係式，雖然如此，仍可透過拼圖方式讓學生直觀的去感受圖形關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充(補證性質)：

註①：

因為由求證過程4點結論 $\Delta ACL \cong \Delta AGM$，可推得 $\angle ACL = \angle AGM = 45°$，且 $\angle ICB = 45°$，

$\angle ACB = 90°$，所以 $\angle ACL + \angle ACB + \angle ICB = 180°$，即 C 在 $\overline{IJ}$ 上。