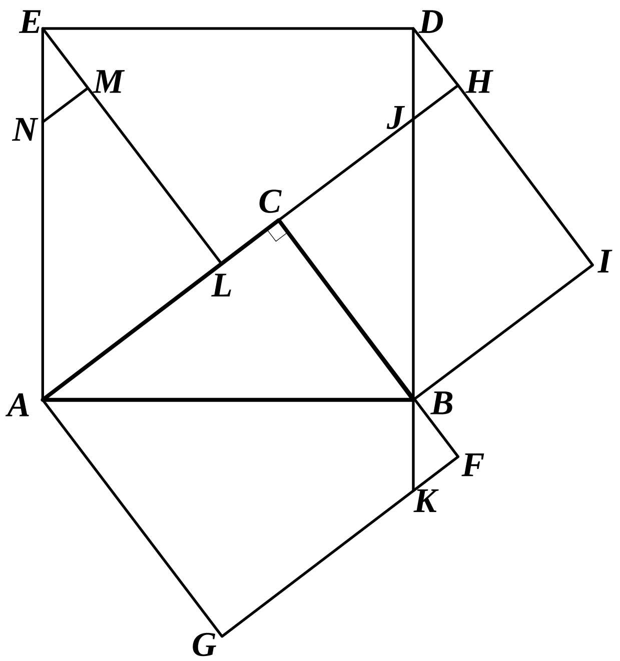
勾股定理證明-G119

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCHI$，且$\overline{CH}$交$\overline{BD}$於J點。
2. 延長$\overline{DB}$交$\overline{FG}$於K點。
3. 從E點作$\overline{EL}$平行$\overline{BC}$。
4. 在$\overline{EL}$上作$\overline{ML}=\overline{BC}$。
5. 從M點作$\overline{MN}$平行$\overline{AC}$。
6. 連接$\overline{DH}$。



【求證過程】

作圖過程中將正方形$ABDE$分割為五個區塊，利用圖形間的全等關係，可比較出正方形$ABDE$面積與另外兩個正方形的關係式，進而推得勾股定理關係式。

1. 運用作圖結果及圖形間關係證明三角形EAL全等於三角形ABC：

   因為$\overline{EL}//\overline{BC}$，所以$\angle ALE=90°$，即$\angle ALE=\angle ACB$；因為$\angle EAL+\angle CAB=90°$，

$\angle CBA+\angle CAB=90°$，所以 $\angle EAL=\angle CBA$．因為 $\angle ALE=\angle ACB$，及前述 $\angle EAL=\angle CBA$，且 $\overline{AE}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta EAL\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

2. 運用第 1 點及圖形間關係證明三角形 ENM 全等於三角形 BKF ：

   因為 $\Delta EAL\cong\Delta ABC$，所以 $\overline{EL}=\overline{AC}=\overline{CF}$，即 $\overline{EL}=\overline{CF}$，因為 $\overline{EM}=\overline{EL}-\overline{ML}$，又因為 $\overline{EL}=\overline{CF}$， $\overline{ML}=\overline{BC}$，所以 $\overline{EM}=\overline{EL}-\overline{ML}=\overline{CF}-\overline{BC}=\overline{BF}$，即 $\overline{EM}=\overline{BF}$；因為 $\overline{EN}//\overline{BK}$，$\overline{EM}//\overline{BF}$，所以 $\angle MEN=\angle FBK$；因為 $\overline{MN}//\overline{AC}//\overline{FK}$ ， $\overline{EM}//\overline{BF}$，所以 $\angle EMN=\angle BFK$．

   因為前述 $\overline{EM}=\overline{BF}$， $\angle MEN=\angle FBK$，及 $\angle EMN=\angle BFK$，所以

$$\Delta ENM\cong\Delta BKF \text{ (ASA 全等).}$$

3. 運用作圖結果及圖形間關係證明三角形 BID 全等於三角形 ALE ：

   因為 $\overline{DI}//\overline{EL}$， $\overline{DB}//\overline{EA}$ ，所以 $\angle BDI=\angle AEL$ ；因為 $\overline{BI}//\overline{AL}$， $\overline{DB}//\overline{EA}$ ，所以 $\angle DBI=\angle EAL$．因為 $\angle BDI=\angle AEL$， $\overline{BD}=\overline{AE}$，及 $\angle DBI=\angle EAL$，所以

$$\Delta BID\cong\Delta ALE \text{ (ASA 全等).}$$

4. 運用第 3 點結果及圖形之間關係證明三角形 DJH 全等於三角形 ENM ：

   因為 $\Delta BID\cong\Delta ALE$，所以 $\overline{DI}=\overline{EL}$，又因為 $\overline{HI}=\overline{BC}=\overline{ML}$，所以 $\overline{DH}=\overline{DI}-\overline{HI}=\overline{EL}-\overline{ML}=\overline{EM}$，即 $\overline{DH}=\overline{EM}$，因為 $\angle JDH=\angle NEM$， $\angle DHJ=\angle EMN$，及前述 $\overline{DH}=\overline{EM}$，所以

$$\Delta DJH\cong\Delta ENM \text{ (ASA 全等).}$$

5. 證明四邊形 $ALMN$ 全等於四邊形 $BIHJ$ ：

   由圖形及第 3 和第 4 點可推得

$$ALMN=\Delta EAL-\Delta ENM=\Delta DBI-\Delta DJH=BIHJ,$$

   即

$$\text{四邊形 } ALMN\cong\text{四邊形 } BIHJ\,.$$

6. 運用前述證明結果找出對應邊及角度關係證明四邊形 $ELJD$ 全等於四邊形 $AGKB$ ：

   由第 1 點 $\Delta EAL\cong\Delta ABC$，可知 $\overline{EL}=\overline{AC}$，推得 $\overline{EL}=\overline{AG}$；由第 2 和第 4 點可推得 $\Delta DJH\cong\Delta BKF$，進一步得 $\overline{DJ}=\overline{BK}$；因為 $\overline{ED}//\overline{AB}$， $\overline{EL}//\overline{AG}$，所以 $\angle DEL=\angle BAG$；因

為 $\overline{DE} // \overline{AB}$，$\overline{DJ} // \overline{BK}$，所以 $\angle EDJ = \angle ABK$. 綜合上述 $\overline{EL} = \overline{AG}$，$\overline{DJ} = \overline{BK}$，

$\angle DEL = \angle BAG$，$\angle EDJ = \angle ABK$，且 $\overline{DE} = \overline{AB}$，可得

$$\text{四邊形 } ELJD \cong \text{四邊形 } AGKB.$$

7. 運用上述結果及圖形找出正方形 $ABDE$ 與正方形 $ACFG$，正方形 $BCHI$ 的關係式：
   由圖形及第 2, 5, 6 點結論可知

$$\begin{aligned} \square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BCJ + \Delta EAL + ELJD \\ &= \Delta ABC + \Delta BCJ + \Delta EMN + ALMN + ELJD \\ &= \Delta ABC + \Delta BCJ + \Delta BKF + BIHJ + AGKB \\ &= (\Delta ABC + \Delta BKF + AGKB) + (\Delta BCJ + BIHJ) \\ &= \square ACFG + \square BCHI\,. \end{aligned}$$

8. 整理第 7 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以由第 7 點結論可推得

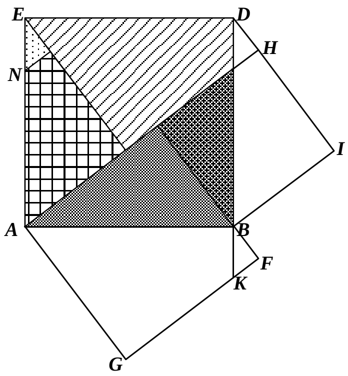
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

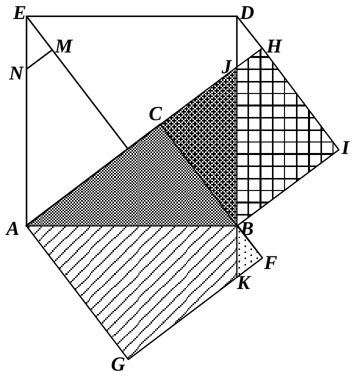
   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 73-74.
2. 心得：此證明主要運用圖形分割後的全等關係，將圖形拼湊找到三個正方形關係，因此此圖形可讓學生用拼圖操作方式體會三個正方形的面積關係，且若是要做拼圖操作則作圖過程中的 $\overline{DH}$ 可省略，因為此一作圖步驟僅是為了要完成圖形全等的證明，並不影響到圖形的拼湊操作。拼圖方式如下：





3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●

4. 補充：華蘅芳簡介：

華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。