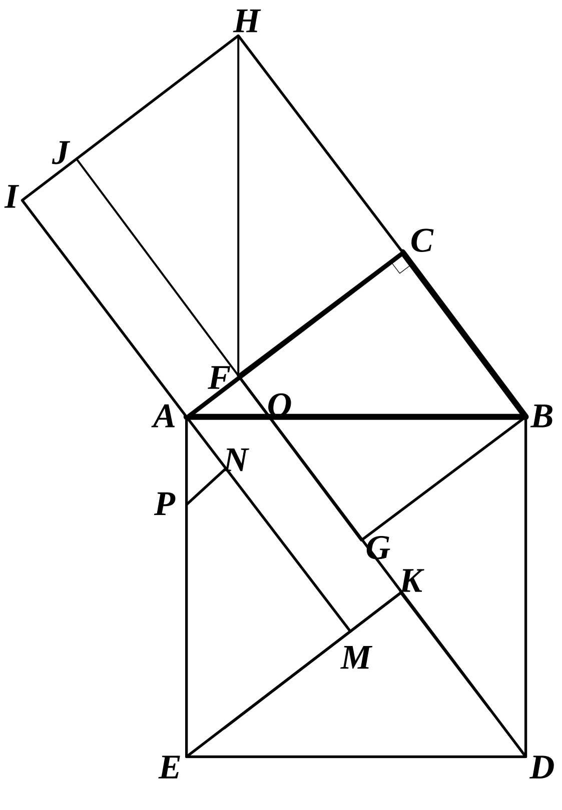
勾股定理證明-G113

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCFG$，且$\overline{FG}$交$\overline{AB}$於O點，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACHI$。
2. 連接$\overline{GD}$（由求證過程第 1 點可得$F-D-G$三點共線）。
3. 延長$\overline{FG}$交$\overline{HI}$於J點。
4. 從E點作$\overline{DF}$的垂線交於K點，並將$\overline{IA}$延長與$\overline{EK}$交於M點。
5. 在$\overline{AM}$上找一點M使得$\overline{MN}=\overline{BC}$。
6. 從N點作$\overline{EM}$的平行線交$\overline{AE}$於P點。
7. 連接$\overline{HF}$。



【求證過程】

如上述作圖過程，恰好將正方形$ABDE$分割成六區塊，證明此六區塊面積恰好可等

同另外兩正方形面積和，其中利用了三角形全等性質，及矩形的全等，即可推得勾股定理關係式。

1. 運用圖中線段平行關係說明數個三角形全等於三角形 ABC ：

   因為 $\angle DBG+\angle GBO=90°=\angle ABC+\angle GBO$, 所以 $\angle DBG=\angle ABC$, 且因為 $\overline{BG}=\overline{BC}$,

   $\overline{BD}=\overline{AB}$, 所以

$$\Delta DBG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等});$$

   由上述可推得 $\angle BGD+\angle BGF=90°+90°=180°$, 即 $F-D-G$ 三點共線；

   因為 $\angle EAM+\angle BAM=90°=\angle BAC+\angle BAM$, 所以 $\angle EAM=\angle BAC$, 且因為

   $\angle EMA=90°=\angle ACB$, $\overline{AE}=\overline{AB}$, 所以

$$\Delta AEM\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等});$$

   因為 $\overline{EK}\,//\,\overline{AC}$, $\overline{KD}\,//\,\overline{BC}$, $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$ ，由平行線性質得 $\angle KED=\angle CAB$, $\angle KDE=\angle CBA$，

   且 $\overline{AB}=\overline{DE}$, 所以

$$\Delta EDK\cong\Delta ABC\ (\text{ASA 全等});$$

   綜合上述可得

$$\Delta EDK\cong\Delta DBG\cong\Delta AEM\cong\Delta ABC.$$

2. 說明三角形 HCF 與三角形 FHJ 全等於三角形 ABC ：

   因為 $\overline{CH}=\overline{AC}$, $\overline{CF}=\overline{BC}$, $\angle HCF=\angle ACB$, 所以

$$\Delta HCF\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等});$$

   同理，

$$\Delta FHJ\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

3. 先說明三角形 APN 全等於三角形 AOF，再利用此結果說明四邊形 $PEMN$ 全等於四邊形 $OBCF$ ：

   由第 1 點可知 $\Delta AEM\cong\Delta ABC$, 可推得 $\overline{AM}=\overline{AC}$; 因為 $\overline{MN}=\overline{BC}$, 所以 $\overline{MN}=\overline{CF}$, 由

   圖形及前述 $\overline{AM}=\overline{AC}$ 及 $\overline{MN}=\overline{CF}$ 可得 $\overline{AN}=\overline{AM}-\overline{MN}=\overline{AC}-\overline{CF}=\overline{AF}$, 即 $\overline{AN}=\overline{AF}$,

   因為 $\angle NAP=\angle FAO$, $\angle ANP=\angle AME=90°=\angle AFO$, 及前述 $\overline{AN}=\overline{AF}$, 所以

$$\Delta APN\cong\Delta AOF\ (\text{ASA 全等});$$

   由第 1 點結論中 $\Delta AEM\cong\Delta ABC$ 及前述 $\Delta APN\cong\Delta AOF$ ，結合圖形可得

$$PEMN=\Delta AEM-\Delta APN=\Delta ABC-\Delta AOF=OBCF$$

   即

$$四邊形 PEMN \cong 四邊形 OBCF .$$

4. 說明矩形 $AFKM$ 全等於矩形 $AFJI$ ：

   因為矩形 $AFKM$ 的長邊長度為 $\overline{AM}$，由第 1 點可知 $\overline{AM}=\overline{AC}$，且 $\overline{AI}=\overline{AC}$，所以可知矩形 $AFJI$ 的長邊長度與 $AFKM$ 的長邊等長，且因為 $\overline{AF}$ 為兩矩形的公共邊，所以由兩矩形的長邊及短邊等長可推得

$$矩形 AFKM \cong 矩形 AFJI$$

5. 由圖形及綜合前述 1, 2, 3, 4 點將正方形 $ABDE$ 重新拼湊組合可得：

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta EDK + \Delta DBG + AMKO + \Delta APN + \Delta OBG + PEMN \\
&= \Delta HFC + \Delta FHJ + (AMKO + \Delta AOF) + \Delta OBG + OBCF \\
&= \Delta HFC + \Delta FHJ + \square AFKM + \Delta OBG + OBCF \\
&= (\Delta HFC + \Delta FHJ + \square AFJI) + (\Delta OBG + OBCF) \\
&= \square ACHI + \square BCFG \ .
\end{aligned}$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 5 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 1 日想到的。
2. 心得：此證明以斜邊為邊長的正方形分割，運用圖形之間的全等關係，將圖形的各個分割部分移動到以兩股為邊的正方形上，因此可得到三個三角形的面積關係，學生若將圖形割補運用拼圖方式以操作取代證明，則較能體會勾股定理幾何意義，可參考 G114。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●