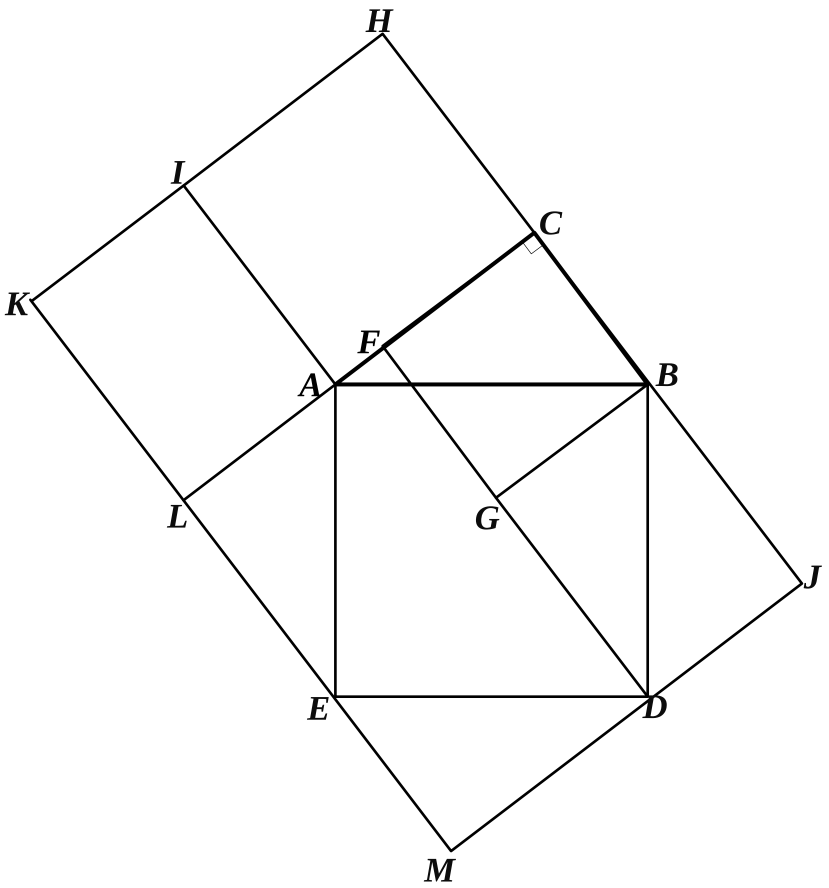
勾股定理證明-G111

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCFG$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACHI$。
2. 延長$\overline{HB}$，使$\overline{BJ}=\overline{AC}$，延長$\overline{HI}$，使$\overline{IK}=\overline{BC}$。
3. 從K點作$\overline{KL}=\overline{AC}$，使四邊形$CHKL$為一矩形。
4. 延長$\overline{KL}$，$\overline{JD}$交於M點，且E點在$\overline{KM}$上（於證明第 1 點中說明）。
5. 連接$\overline{GD}$。



【求證過程】

如上圖的分割，可將長方形$JHKM$的面積作兩種不同組合，利用三角形的全等，及矩形面積為三角形面積兩倍的關係，比較長方形$JHKM$面積的兩種不同組合，可推得作圖步驟一的三個正方形面積關係，即勾股定理關係式。

1. 首先說明圖中若干個三角形全等：

因為 $\angle CBA+\angle CAB=90°$，且 $\angle CBA+\angle DBJ=90°$，所以 $\angle CAB=\angle DBJ$，因為 $\overline{AC}=\overline{BJ}$，

$\angle CAB=\angle DBJ$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，所以

$$\Delta BDJ\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等});$$

因為 $\angle EDM+\angle BDJ=90°=\angle DBJ+\angle BDJ$，所以 $\angle EDM=\angle DBJ=\angle BAC$，因為

$\overline{DE}=\overline{AB}$，$\angle DME=90°=\angle ACB$，及前述 $\angle EDM=\angle BAC$，所以

$$\Delta DEM\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}),$$

因為 $\angle ALE=90°=\angle ACB$，$\overline{AL}=\overline{BC}$，$\overline{AE}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta EAL\cong\Delta ABC\ (\text{RHS 全等}),$$

由前述 $\Delta EAL\cong\Delta ABC$ 及 $\Delta DEM\cong\Delta ABC$，推得 $\angle AEL+\angle DEM=90°$，即 E 點在 $\overline{KM}$ 上；

因為 $\angle CBA+\angle ABG=90°$，且 $\angle GBD+\angle ABG=90°$，所以 $\angle CBA=\angle DBG$. 因為 $\overline{BG}=\overline{BC}$，

$\angle CBA=\angle DBG$，$\overline{BD}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta DBG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等});$$

由以上說明可結論：

$$\Delta BDJ\cong\Delta DEM\cong\Delta EAL\cong\Delta DBG\cong\Delta ABC.$$

2. 說明圖中矩形面積相當於兩個直角三角形 ABC 的和：

因為 $\overline{AI}=\overline{AC}$，$\overline{IK}=\overline{BC}$，所以

$$\square AIKL=2\,\Delta ABC;$$

同理，

$$\square BJDG=2\,\Delta ABC.$$

3. 運用邊長關係說明矩形 $DMLF$ 與矩形 $CHKL$ 全等：

因為 $\overline{FG}+\overline{GD}=\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{EM}+\overline{EL}$，且因為 $\angle FLM=\angle DML=90°$，所以四邊形 $DMLF$ 為一矩形，且邊長與矩形 $CHKL$ 相等，可進一步得知

$$\text{矩形 } DMLF\cong\text{矩形 } CHKL.$$

4. 運用圖形前面幾點證明結果將矩形 $JHKM$ 面積以兩種不同方式呈現並比較：

由圖形及上述第 1 點可知

$$
\begin{aligned}
\square JHKM &= \square ABDE + \square CHKL + \Delta ABC + \Delta BDJ + \Delta DEM + \Delta EAL \\
&= \square ABDE + \square CHKL + 4\Delta ABC
\end{aligned}
$$

另外由圖形及上述第 2, 3 點可知

$$
\begin{aligned}
\square JHKM &= \square BCFG + \square ACHI + \square DMLF + AIKL + BGDJ \\
&= \square BCFG + \square ACHI + \square CHKL + 4\Delta ABC \ ,
\end{aligned}
$$

由前述兩種長方形 *JHKM* 面積表示方法比較可得

$$\square ABDE + \square CHKL + 4\Delta ABC = \square BCFG + \square ACHI + \square CHKL + 4\Delta ABC,$$

即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square ACHI \ .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 *ABC* 三邊長關係：

   因為正方形 *ABDE* 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 *BCFG* 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 *ACHI* 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 4 點結論可推得

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Joh. Hoffmann (1821). *Der Pythagoräische Lehrsatz*. London : Henry Board.
   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* **(**p. 19**)**. Leipz.: Friese.
2. 心得：此證明是利用外圍長方形面積的兩種不同分割表現式，說明圖形中三個正方形的關係，其分割方式雖與 G107 不同，但分割出來的部分經過移動改變位置後圖形是相同的，同樣的此圖形也不能透過割補用拼圖方式讓學生體會勾股定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	