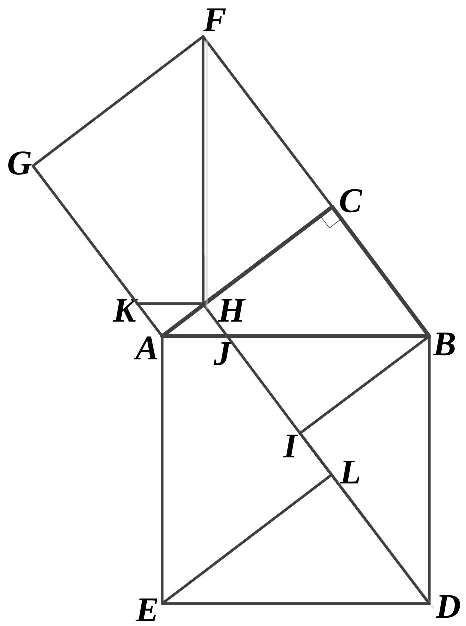
勾股定理證明-G110

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCHI$，且$\overline{HI}$交$\overline{AB}$於J點。
2. 連接$\overline{DI}$（於證明過程第 1 點說明$H-I-D$三點共線）。
3. 從H點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AG}$於K點。
4. 從E點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{DI}$於L。
5. 連接$\overline{FH}$。



【求證過程】

上述輔助圖將正方形$ABDE$分割成四部分，找出這些分割區塊與其他正方形分割區塊的全等關係，並證明其全等，利用圖形之間的割補，可推出勾股定理關係式。

1. 首先證明圖中若干個三角形全等於三角形ABC，進一步推得$H-I-D$三點共線：

   因為$\angle ABC+\angle JBI=90°$，$\angle JBI+\angle IBD=90°$，所以$\angle IBD=\angle ABC$，且因為$\overline{BI}=\overline{BC}$，

   $\overline{BD}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta DBI \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

因此可進一步推得$\angle BID = 90°$，且因為$\angle BIJ = 90°$，所以$H-I-D$三點共線;

因為$\overline{EL} // \overline{AC}$，$\overline{ED} // \overline{AB}$，所以$\angle LED = \angle CAB$；因為 $\angle BDI + \angle LDE = 90°$，

$\angle BDI + \angle IBD = 90°$，所以$\angle LDE = \angle IBD = \angle CBA$，

由前述$\angle LED = \angle CAB$，$\angle LDE = \angle CBA$，及$\overline{ED} = \overline{AB}$可得

$$\Delta EDL \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)},$$

因為$\overline{FC} = \overline{AC}$，$\angle FCH = \angle ACB$，$\overline{CH} = \overline{BC}$，所以

$$\Delta FHC \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

2. 運用平行四邊形性質說明三角形AJH全等於三角形HKA：

   因為由作圖過程可推得$\overline{KH} // \overline{AJ}$，$\overline{AK} // \overline{JH}$，所以四邊形$AJHK$為一平行四邊形，因此可推得

$$\Delta AJH \cong \Delta HKA.$$

3. 說明四邊形$AELJ$全等於四邊形$HFGK$：

   因為$\overline{DH} = \overline{HI} + \overline{DI} = \overline{BC} + \overline{AC}$，且$\overline{DH} = \overline{HL} + \overline{DL} = \overline{HL} + \overline{BC}$，比較前述兩式可得

   $\overline{BC} + \overline{AC} = \overline{HL} + \overline{BC}$，推得$\overline{HL} = \overline{AC}$，且由圖形可得$\overline{JL} = \overline{HL} - \overline{HJ} = \overline{AG} - \overline{AK} = \overline{GK}$，即

   $\overline{JL} = \overline{GK}$；因為$\overline{EL} // \overline{GF}$，$\overline{AE} // \overline{FH}$，所以$\angle AEL = \angle HFG$.

   根據上述第 1, 2 點的結論可推得$\overline{EL} = \overline{AC} = \overline{GF}$，$\overline{FH} = \overline{AB} = \overline{AE}$，$\overline{KH} = \overline{AJ}$，因為前述

   $\overline{JL} = \overline{GK}$，$\overline{EL} = \overline{GF}$，$\overline{FH} = \overline{AE}$，$\overline{KH} = \overline{AJ}$，$\angle AEL = \angle HFG$，及$\angle ELJ = 90° = \angle FGK$，

   $\angle EAJ = 90° = \angle FHK$，所以

$$\text{四邊形 } AELJ \cong \text{四邊形 } HFGK.$$

4. 運用作圖將正方形$ABDE$分割為四區塊，利用前述證明將正方形$ABDE$重新拼湊：

   由圖形及前述證明可知

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= AELJ + \Delta EDL + \Delta DBI + \Delta BJI \\
&= HFGK + \Delta ABC + \Delta FHC + \Delta BJI \\
&= HFGK + (\Delta AJH + BCHJ) + \Delta FHC + \Delta BJI \\
&= (HFGK + \Delta HKA + \Delta FHC) + (BCHJ + \Delta BJI) \\
&= \square ACFG + \square BCHI
\end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI .$$

5. 整理第 4 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$,所以由第 4 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry* (p.155). New York : Macmillan and co.
2. 心得：此證明運用圖形之間的全等關係，可運用以斜邊為邊長的正方形分割，將各分割部分移動到以兩股為邊長的正方形上，因此可得到三個三角形的面積相關係，學生若將圖形割補運用拼圖方式，以操作取代證明則較能體會畢氏定理的意義。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	