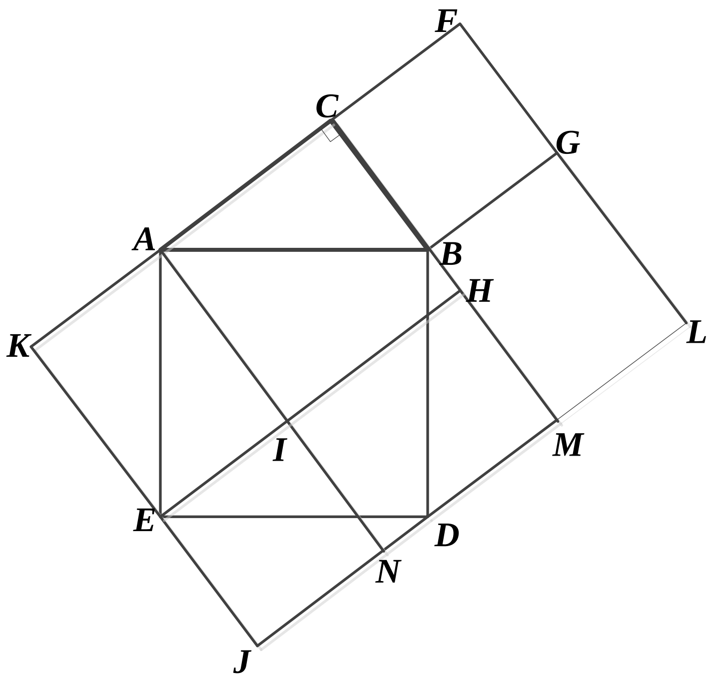
勾股定理證明-G107

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCFG$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACHI$。
2. 從E點作一直線與$\overline{BC}$平行，從D點作第二條直線與$\overline{AC}$平行，且兩直線交於J點。
3. 延長$\overline{AC}$與第一條直線交於K點。
4. 分別延長$\overline{FG}$，$\overline{BC}$，$\overline{AI}$與第二條直線分別交於L，M，N點。



【求證過程】

證明圖中若干個圖形全等，利用上述作圖結果將圖中外圍最大矩形面積作兩種不同表現式子，比較兩種面積表現式，即可推出勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形AEI，三角形EAK全等於三角形ABC：

   因為$\angle BAC+\angle BAI=90°$，且$\angle EAI+\angle BAI=90°$，所以$\angle EAI=\angle BAC$，因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，

   $\angle AIE=90°=\angle ACB$，及前述$\angle EAI=\angle BAC$，所以

   $$\Delta AEI\cong\Delta ABC\text{(AAS 全等)},$$

   因為由作圖過程可知四邊形$AIEK$為矩形，所以可推得

   $$\Delta EAK\cong\Delta AEI\cong\Delta ABC.$$

2. 藉由三角形全等關係說明四邊形$EINJ$為正方形：

因為由圖形可推得$\angle AEK+\angle DEJ=90°$，且由第 1 點結論可推得$\angle AEK=\angle BAC$，所以$\angle DEJ=90°-\angle AEK=90°-\angle BAC=\angle ABC$，即$\angle DEJ=\angle ABC$；同理由$\angle BDM=\angle ABC$

可推得$\angle EDJ=\angle BAC$，因為$\overline{DE}=\overline{AB}$及前述$\angle DEJ=\angle ABC$，$\angle EDJ=\angle BAC$，所以

$$\Delta DEJ\cong\Delta ABC\ \text{(AAS 全等)},$$

因為作圖過程可知四邊形$EINJ$為矩形，且由上述得$\overline{EJ}=\overline{BC}$，及由第 1 點可得

$\overline{IE}=\overline{BC}$，推得$\overline{IE}=\overline{EJ}$，所以

四邊形$EINJ$為正方形。

3. 說明矩形$EJMH$全等於矩形$CFLM$：

因為四邊形$FLJK$為矩形，所以$\overline{FL}=\overline{JK}$，且因為$\overline{EJ}=\overline{BC}=\overline{FG}$，推得$\overline{GL}=\overline{EK}=\overline{AC}$，

所以矩形$CFLM$的長邊$\overline{FL}$長度為$\overline{FG}+\overline{GL}=\overline{BC}+\overline{AC}$，因為矩形$EJMH$的長邊$\overline{EH}$長

度為$\overline{EI}+\overline{IH}=\overline{BC}+\overline{AC}$與矩形$CFLM$的長邊等長，且短邊長度都為$\overline{BC}$，所以推得

矩形$EJMH\cong$矩形$CFLM$.

4. 說明矩形$AIEK$與矩形$BGLM$的面積可視為兩個直角三角形ABC的和：

因為$\overline{AE}$為矩形$AIEN$的對角線，所以

$$\square AIEK=2\Delta AEI=2\Delta ABC;$$

因為$\square BGLM=\square AIEK$，所以可得

$$\square BGLM=2\Delta ABC.$$

5. 比較長方形$FLJK$的兩種不同面積表現式：

因為由圖形可知

$$\square FLJK=\square ABDE+\square CFLM+4\Delta ABC;$$

另外再由圖形及第 3, 4 點結論可推得：

$$\begin{aligned}\square FLJK&=\square BCFG+\square ACHI+\square AIEK+\square EJMH+\square BGLM\\&=\square BCFG+\square ACHI+2\Delta ABC+\square CFLM+2\Delta ABC\\&=\square BCFG+\square ACHI+\square CFLM+4\Delta ABC\ ,\end{aligned}$$

所以比較上述兩式可得：

$$\square ABDE+\square CFLM+4\Delta ABC=\square BCFG+\square ACHI+\square CFLM+4\Delta ABC,$$

即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square ACHI\ .$$

6. 整理第 5 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCFG$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $ACHI$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 5 點結論可推得

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自以下書籍：
   Joh. Hoffmann (1821). *Der Pythagoräische Lehrsatz*. London : Henry Board.
   J. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p.19). Leipz. : Friese.
2. 心得：此證明是利用外圍長方形面積的兩種不同分割表現式，說明圖形中三個正方形的關係，因此這兩種不同面積表現式應分別要有具有正方形面積，才能夠比較出三個正方形的關係，此種方式沒有辦法讓學生用拼圖的方式操作。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	