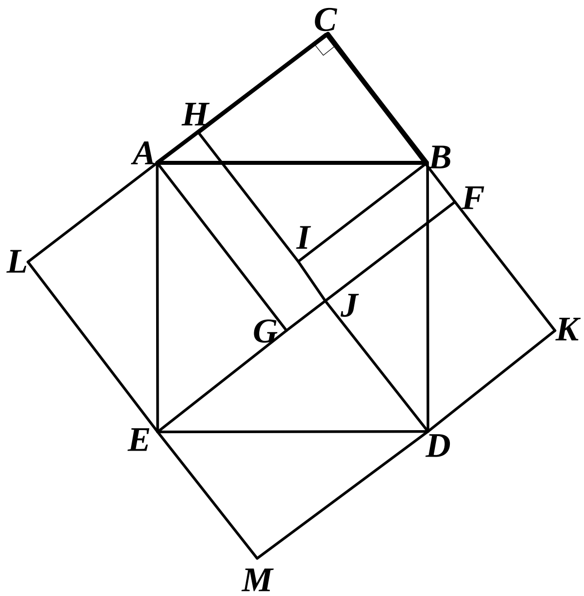
勾股定理證明-G142

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $BCHI$ 。
2. 延長 $\overline{HI}$ 到 D，並與 $\overline{FG}$ 交於 J 點（於證明過程第 1 點中說明 $H-I-D$ 三點共線）。
3. 延長 $\overline{CF}$ 使 $\overline{FK}=\overline{BC}$ 。
4. 延長 $\overline{CA}$ 使 $\overline{AL}=\overline{BC}$ 。
5. 連接 $\overline{DK}$， $\overline{EL}$ ，並分別將兩者延長交於 M 點。
6. 連接 $\overline{EG}$ （ $E-G-F$ 三點共線，於證明過程第 4 點說明）。



【求證過程】

將最外圍四邊形扣除四個三角形可形成正方形 $ABDE$，而最外圍四邊形又可視為四個四邊形的和，證明分割部分若干個圖形全等，運用圖形的全等關係整理正方形 $ABDE$ 關係式即可得勾股定理。

1. 說明三角形 DBI 全等於三角形 ABC ，並推得 $H-I-D$ 三點共線：
   因為 $\angle ABI+\angle IBD=90°$， $\angle ABI+\angle ABC=90°$，所以 $\angle IBD=\angle ABC$，因為 $\overline{BI}=\overline{BC}$，
   $\overline{BD}=\overline{AB}$，及前述 $\angle IBD=\angle ABC$，所以

$$\Delta DBI \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

由此可推得 $\angle BID = \angle ACB = 90°$，因此 $\angle BIH + \angle BID = 180°$，即 $H-I-D$ 三點共線。

2. 由圖形關係及第 1 點中的三角形的全等關係說明 $BIDK$ 為矩形，推得三角形 DBI 全等於三角形 BDK：

   因為 $\overline{FK} = \overline{BC}$，所以 $\overline{BK} = \overline{BF} + \overline{FK} = \overline{BF} + \overline{BC} = \overline{CF} = \overline{AC}$，即 $\overline{BK} = \overline{AC}$，再由前述第 1 點敘述 $\Delta DBI \cong \Delta ABC$ 可知 $\overline{DI} = \overline{AC}$，推得 $\overline{BK} = \overline{ID}$，因為第 1 點知 $\angle BID = 90° = \angle IBK$，

   又因為前述 $\overline{BK} = \overline{ID}$，可推得 $BIDK$ 為一矩形，所以

$$\Delta DBI \cong \Delta BDK.$$

3. 說明三角形 EAL 全等於三角形 ABC：

   因為 $\angle EAL + \angle BAC = 90°$，$\angle ABC + \angle BAC = 90°$，所以 $\angle EAL = \angle ABC$. 因為 $\overline{AL} = \overline{BC}$，

   $\overline{AE} = \overline{AB}$，及前述 $\angle EAL = \angle ABC$，所以

$$\Delta EAL \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

4. 說明三角形 AEG 全等於三角形 ABC，並由此說明 $E-G-F$ 三點共線：

   因為 $\angle EAG + \angle BAG = 90°$，$\angle CAB + \angle BAG = 90°$，所以 $\angle EAG = \angle CAB$. 因為 $\overline{AE} = \overline{AB}$，

   $\overline{AG} = \overline{AC}$，及前述 $\angle EAG = \angle CAB$，所以

$$\Delta AEG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   由此可推得 $\angle AGE = \angle ACB = 90°$，因此 $\angle AGE + \angle AGF = 180°$，即 $E-G-F$ 三點共線。

5. 由前述關係說明三角形 EDJ 全等於三角形 ABC：

   因為 $\angle AEG + \angle JED = 90°$，再由前述 $\Delta AEG \cong \Delta ABC$ 可知 $\angle AEG = \angle ABC$，所以 $\angle ABC + \angle JED = 90°$，且因為 $\angle ABC + \angle BAC = 90°$，所以 $\angle JED = \angle BAC$，

   因為前述 $\angle JED = \angle BAC$ 及 $\overline{DE} = \overline{AB}$，$\angle EJD = 90° = \angle ACB$，所以

$$\Delta EDJ \cong \Delta ABC \quad \text{(AAS 全等)}.$$

6. 說明圖中若干三角形全等：

   由第 2 點證明過程可知 $BIDK$ 為一矩形，又因為 $\overline{DM}$ 為 $\overline{DK}$ 的延長，因此 $\overline{DM} \,//\, \overline{JE}$，同理 $\overline{EM} \,//\, \overline{JD}$，又 $\angle EJD = 90°$ 所以 $DJEM$ 為一矩形，$\overline{DE}$ 為其對角線，因此

$$\Delta DEM \cong \Delta EDJ,$$

   綜合前述第 1 到 6 點的三角形全等關係可得

$$\Delta DBI \cong \Delta BDK \cong \Delta EAL \cong \Delta AEG \cong \Delta EDJ \cong \Delta DEM \cong \Delta ABC.$$

7. 說明四邊形 $DKFJ$ 是邊長為 $\overline{BC}$ 的正方形：

   由第 2 點證明過程可知 $BIDK$ 為一矩形，又因為 $\overline{FJ} \,//\, \overline{BI}$，所以 $DKFJ$ 也為一矩形；因

為 $\Delta EDJ \cong \Delta ABC$ 所以 $\overline{DJ} = \overline{BC}$，又因為 $\overline{JF} = \overline{CH} = \overline{BC}$，所以 $DKFJ$ 為以 $\overline{BC}$ 為邊長的正方形，即

$$\square DKFJ = \square BCHI .$$

8. 運用作圖將正方形 $ABDE$ 分割，利用前述證明將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：
   由圖形及第 4, 5 點可知

$$\begin{aligned} \square ABDE &= CKML - 4\Delta ABC \\ &= \square ACFG + \square DKFJ + ALEG + EMDJ - 4\Delta ABC \\ &= \square ACFG + \square BCHI + 4\Delta ABC - 4\Delta ABC \\ &= \square ACFG + \square BCHI \ , \end{aligned}$$

   即

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI .$$

9. 整理第 8 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：
   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $BCHI$ 邊長為 $\overline{BC}$,所以由第 8 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：
   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(P.16). Leipz.: Friese.
   Benj. F. Yanney and James(1898). A. New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 5(3), 74.*
2. 心得：此證明運用圖形之間的全等關係，透過整個圖形的分割，必須用最外圍整體面積去扣除部分圖形找出三個正方形關係，圖形關係並不複雜，搭配簡單的代數式子即可得到勾股定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	