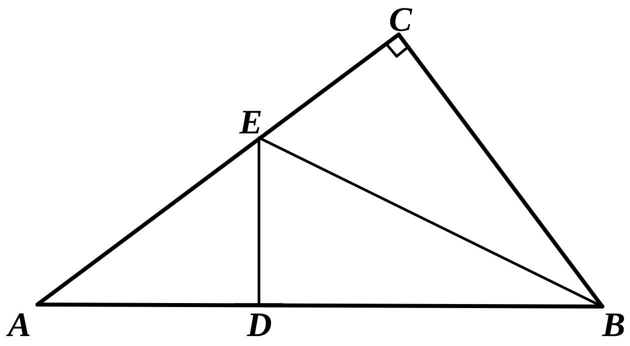
勾股定理證明-A003

【作輔助圖】

1. 在 $\overline{AB}$ 上取一點 D ，使得 $\overline{BD}=\overline{BC}$ 。

2. 從 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AC}$ 於 E 點。

3. 連接 $\overline{BE}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，讓裡面形成另外三個直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，最後利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 BDE 與三角形 BCE 全等：

   因為 $\angle BDE=\angle BCE=90°$, $\overline{BD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{BE}=\overline{BE}$ ，所以

   $$\Delta BDE\cong\Delta BCE\text{ (RHS 全等)},$$

   推得

   $$\overline{DE}=\overline{CE}.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 AED 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為 $\angle ADE=\angle ACB=90°$ 且 $\angle CAB=\angle DAE$ ，所以可推得

   $$\Delta ABC\sim\Delta AED\text{ (AA 相似)},$$

   由此可知： $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AD}$ ，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{AE}$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AB}-\overline{BD}\right)=\overline{AC}\times\left(\overline{AC}-\overline{CE}\right)$$
$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}^2-\overline{AC}\times\overline{DE}.$$

3. 同樣利用第 2 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 AED 相似可知：$\overline{BC}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{AD}$，整理得

$$\overline{BC}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{BC}\times\left(\overline{AB}-\overline{BD}\right)=\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{BC}\times\overline{AB}-\overline{BC}^2=\overline{AC}\times\overline{DE}.$$

4. 將第 2 點及第 3 點的等式相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{BC}+\overline{BC}\times\overline{AB}-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AC}\times\overline{DE}+\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(3), 66.

   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of euclid, *Mathematical Monthly,* 2(2), 45.

2. 心得：

   此證明雖然輔助線較前兩個多，學生可能會認為較困難，但其實一樣只是利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並簡單將等式相加，即可推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	