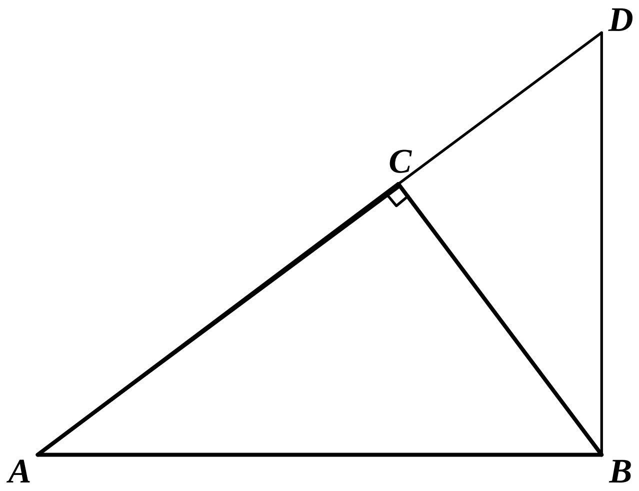
勾股定理證明-A002

【作輔助圖】

延長 $\overrightarrow{AC}$，且從 B 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overrightarrow{AC}$ 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖上所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ADB、三角形 BDC 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle ABD = 90°$ 且 $\angle CAB = \angle BAD$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ADB \sim \Delta BDC$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 ACD 相似可知：$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$，整理得

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC} \times \overline{CD}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係，並將等式整理，推出勾股定理的關係式：

由三角形 ABC 與三角形 ADB 相似可知： $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AD}$ ，整理得

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}\times\overline{AD}\\ &= \overline{AC}\times\left(\overline{AC}+\overline{CD}\right)\\ &= \overline{AC}^2+\overline{AC}\times\overline{CD}.\end{aligned}$$

將第 2 點的等式 $\overline{BC}^2=\overline{AC}\times\overline{CD}$ 代入上式，得

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *3*(3), 65-66.
2. 心得：
   此證明與 A001 一樣，算是作圖較少的證明，學生閱讀起來也較容易理解，利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並簡單將等式代入，即可推出勾股定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●