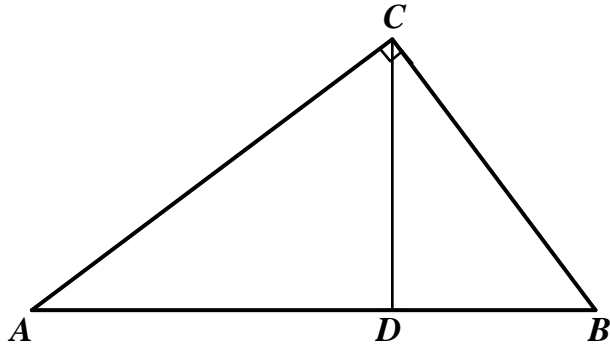


勾股定理證明-A001

【作輔助圖】

從 C 點作 \overline{AB} 的垂線，交 \overline{AB} 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，使得裡面形成兩個直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACD 、三角形 CBD 皆相似：

因為 $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle DAC$ ，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (AA 相似)，同理，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 CBD 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{BD}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 ACD 相似可知： $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}.$$

4. 將第 2 點及第 3 點的等式相加整理，推出勾股定理的相關式：

$$\begin{aligned}
\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{AB} \times \overline{AD} \\
&= \overline{AB} \times (\overline{BD} + \overline{AD}) \\
&= \overline{AB} \times \overline{AB} \\
&= \overline{AB}^2,
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

這個證明是歐幾里德(Euclid, 325-265 BC)《幾何原本》的第二個證明，出現在第六冊第 31 命題，以及勒讓德(A. M. Legendre, 1752-1833)在 19 世紀早期曾證明過，還有愛因斯坦(A. Einstein, 1879-1955)在他 12 歲時曾自己用此方法證明過勾股定理，除此之外還收錄於以下書籍與期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). *New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. The American Mathematical Monthly*, 3(3), 65-66.

Legendre A. M. (1858). *Elements of geometry and trigonometry* (pp. 111-112). New York: A. S. Barnes.

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 86). Amsterdam: A. Versluys.

George C. Edwards (1896). *Elements of geometry* (p. 157). New York: Macmillan.

2. 心得：

此證明是魯米斯在《勾股定理》這本書中認為是所有勾股定理證明最簡短的，僅簡單在直角的點上作垂線，切出兩個直角三角形，利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並簡單將等式代入，即可推出勾股定理，而用此方法證明的人也相當多，算是代數證明中經典的一個證明。

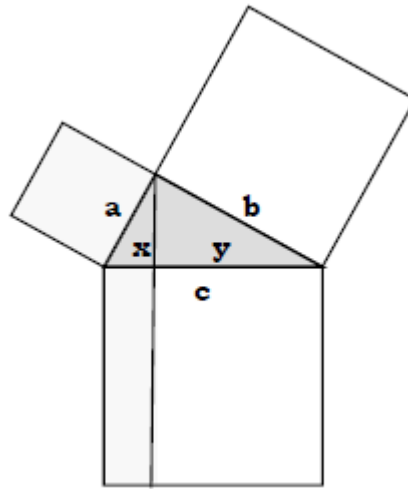
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：簡述勒讓德與愛因斯坦證明勾股定理的故事：

勒讓德是位著名的法國數學家，他的主要貢獻在統計學、數論、抽象代數與數學分析上。勒讓德的主要研究領域是分析學（尤其是橢圓積分理論）、數論、初等幾何與天體力學，取得了許多成果，導致了一系列重要理論的誕生。

勒讓德的證明是起源來自歐幾里德證明的圖「風車」，如下圖，他再縮減成此證明的圖，他表示切出的兩個小的直角三角形，都相似於主要的三角形，只要有這方面的常識，一點點代數就能完成證明了。



除此之外，還有愛因斯坦也用過此方法證明勾股定理，愛因斯坦的《自述》和歐幾里得《幾何原本》的分析，可以證實愛因斯坦 12 歲時曾獨立地得出了畢達哥拉斯定理的一種證明，而且這是為數眾多證法中最为簡單和最好的。然而，這不是創新的，因為《幾何原本》中就有了這一證法，但對當時的他來說，並不可能看過此本著作的。愛因斯坦天賦的好奇心、敏銳的理性思維、勤奮的鑽研精神和啟蒙者對他的教育是這一奇蹟發生的必要條件。

在愛因斯坦的《自述》中也提到：「在 12 歲時，有位叔叔曾經把畢達哥拉斯定理告訴了我。經過艱鉅的努力以後，我根據三角形相似性成功地證明了這條定理，在這樣做的時候，我覺得，直角三角形各個邊的關係'顯然'完全決定於它的一個銳角。在我看來，只有在類似方式中不是表現得很顯然的東西，才需要證明。」