生命之路Ⅱ工作單

撰稿：蘇章瑋

引言：《生命之路Ⅱ》(Life of Path II)是荷蘭版畫家艾薛爾在1958年3月所作的一幅木刻版畫，作品每隻魚的身體使用灰綠色與白色(底色)為主，輔以黑色的線條。影片中的封面圖是艾薛爾在同年同月所創作的另一幅作品《E102 紅魚》，如下圖一所示：

圖一

圖二

圖二則為明尼蘇達州德盧斯大學數學與統計系的 Joshua Jacobs 所發表的《Factor Group Transformations on Escher Patterns》中，將《E102 紅魚》的原圖以電腦程式變形後所仿製的《生命之路Ⅱ》，並在文中詳細列出他所使用的變換方式。而我們團隊則是以 Flash 軟體，將《E102 紅魚》的數學骨架變形之後，重新密鋪整個平面。值得注意的地方是，在變形之後原圖的鉛直方向變成由中央往四周散開，使得原圖朝右上游動的灰綠魚變形之後朝著中央沿著螺線游入變小，而白魚卻恰相反地沿著螺線向外游出變大，艾薛爾這些由外而內的無窮大到無窮小圖形，再變換為另一幅由內而外的無窮小到無窮大之圖形，象徵著生命循環的過程，故名之《生命之路》。現在，讓我們一起來欣賞這段表達輪迴與連綿不絕的生命之路吧！

請在電腦上點選《E 生命之路Ⅱ.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 生命之路Ⅱ的數學與藝術

我們可以把生命之路Ⅱ的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由不等大小的雙色等腰梯形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這等腰梯形正是其中兩隻紅魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個等腰梯形放大，從這等腰梯形剪下四小塊後，依數學原理的旋轉及縮放後貼到正確的位置後，即裁貼出兩隻紅魚。

第三幕：將兩隻紅魚的外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將大小不同的紅魚們一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

□ 正方形　□ 菱形　　□ 等腰梯形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移　☐ 旋轉　☐ 翻面　☐ 縮放

3. 影片中有幾種顏色的紅魚？

☐ 兩種　☐ 三種　☐ 四種

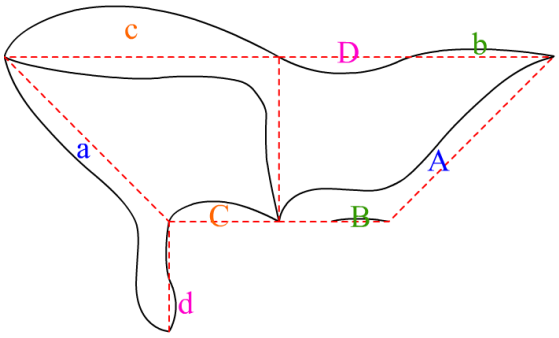
4. 鋪滿數學舞台的魚們有哪些特色？

☐ 不重疊　☐ 無空隙　☐ 外形都一樣大

二、 如何從數學骨架裁貼出紅魚

綜合下面三個方式即可裁貼出紅魚，方式如下：

甲、將等腰梯形剪下四個小區塊 A , B , C , D，並將這四個小區塊經由縮放、平移與旋轉後貼到正確的位置上，即 A → a；B → b；C → c；D → d



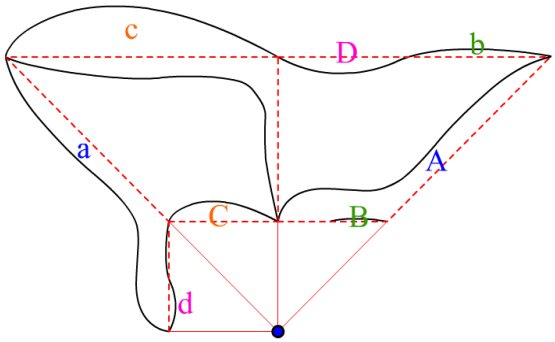
乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的縮放、平移與旋轉：

(1) A → a：將 A 區塊以藍點為中心逆時針旋轉90度到 a

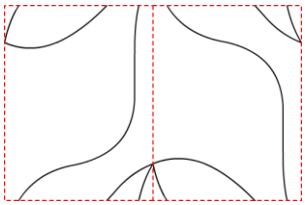
(2) B → b：將 B 區塊以藍點為中心放大為 $\frac{5}{2}$ 倍到 b

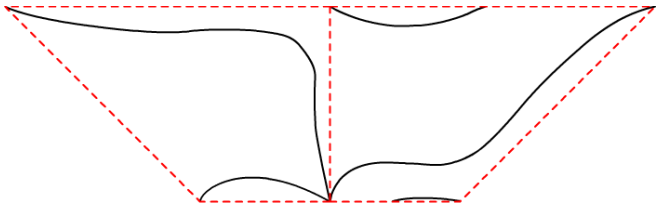
(3) C → c：將 C 區塊以藍點為中心放大為 $\frac{5}{2}$ 倍到 c

(4) D → d：將 D 區塊以藍點為中心縮小為 $\frac{2}{5}$ 倍後，逆時針旋轉90度到 d



丙、另外，我們比較一下《E102 紅魚》與《生命之路Ⅱ》的裁貼，觀察出《生命之路Ⅱ》的數學骨架是由《E102 紅魚》的兩個數學骨架組合後向兩邊分別變形為等腰梯形而得，如下圖所示：





裁貼出兩隻魟魚後可以發現：往左右不同方向變形的等腰梯形造成兩隻魟魚的形狀是不同的。這就是兩隻魟魚在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是魟魚磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魟魚可以互相密合，其密合方式有四種，我們看看下面：

(1) 兩隻不同形狀的魟魚之間的四種互相密合：

(2) 4隻黑色魟魚包圍1隻白色魟魚

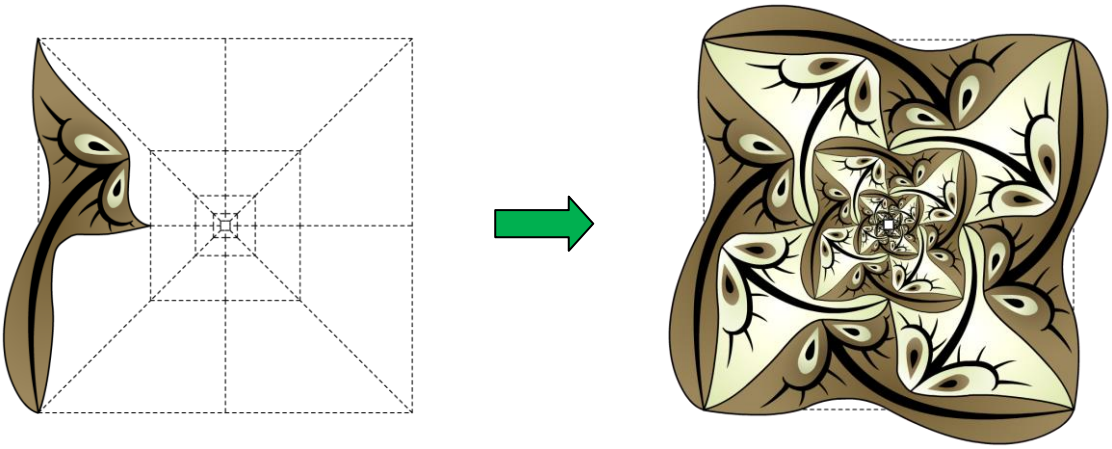
(3) 4隻黑色魟魚包圍1隻白色魟魚

(4) 最外圈的黑白相接用魚

以這四種密合方式，就可以使紅魚磁磚密鋪在平面上了。

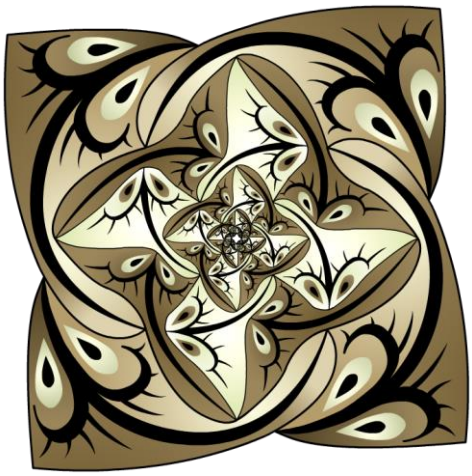
四、 生命之路Ⅱ的鑲嵌圖

透過了解紅魚在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出生命之路鑲嵌圖，左下圖是先將紅魚放在數學骨架上的正確位置，其他的紅魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一縮放後按照密合方式密鋪。



此外，為了讓最外圈向外游出的白魚與向內游入的黑魚可以被連接，我們仿照原圖設計了一隻了黑白相接用魚，如所下圖所示：

再將其與與原先的鑲嵌圖結合，完全仿製了艾薛爾的原作品。



關於艾薛爾的《生命之路Ⅱ》原圖，如下圖所示：

圖中白色的紅魚由中央的無限小誕生，向外循著四條順時針轉出的螺線游出，到了作品中的最外圍後，逐漸轉換顏色與方向變成灰白相間的魚，再直接向內轉入且變色為灰綠色紅魚，循著順時針轉入的螺線游入，回歸到無限小而消失。

生命之路Ⅱ回饋單

1. 仔細觀察第一幕等腰梯形數學骨架的組合，你能用這樣的密鋪方式將一張正方形的桌子完全鋪滿而不重疊嗎？

2. 請你回想一下，每一隻紅魚周遭圍繞著幾隻紅魚呢？
   □ 3 隻　　□ 4 隻　　□ 5 隻　　□ 6 隻

3. 請你回想一下，最後的鑲嵌圖中總共有幾種不同形狀的魟魚呢？
   □ 2 種　　□ 3 種　　□ 4 種

4. 兩隻魟魚的表面積與其數學骨架等腰梯形的面積是否一樣呢？
   □ 是　　□ 否　　□ 不一定

5. 右下圖為艾薛爾的《生命之路Ⅰ》的版畫，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出《生命之路Ⅱ》的等腰梯形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩隻魟魚。

6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多 10 分，最少 0 分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：