

漩渦工作單

撰稿：蘇章瑋

引言：《漩渦》(Whirlpools)是荷蘭版畫家艾薛爾在1957年11月所作的一幅版畫，作品每隻魚的身體使用單一顏色—紅色及灰色，再印製上黑色的紋路。影片中的封面圖是艾薛爾在1956年11月所創作的另一幅版畫《圍繞》(Fish Vignettes)，如下圖一所示：



圖一



圖二

圖二則為艾薛爾在創作此版畫所用的一塊木口木刻版模與另一塊木刻版模。將右方較長的板模印製紅色，再旋轉180度印製灰色後；並同樣將左邊的板模印製兩次黑色紋路就完成了《漩渦》。仔細觀察右邊原始版模的凸出部分，一條小魚由下方的漩渦中心出發，逐漸變大，經過中間後轉彎並改為變小向上方的漩渦中心邁進。這樣由一個漩渦到另一個漩渦的轉換，就像是從無到有，再由有化無！這其中數學所代表的角色為何？讓我們往下來一探究竟吧！

請在電腦上點選《E 漩渦.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、漩渦的數學與藝術

我們可以把漩渦的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由不等大小的等腰直角三角形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這等腰直角三角形正是其中魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個等腰直角三角形放大，從這等腰直角三角形剪下五小塊後，依數學原理的旋轉、翻面及縮放後貼到正確的位置後，再經由向左或向右的偏移，即裁貼出魚。

第三幕：將魚的外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將大小不同的魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

等腰直角三角形 正三角形 正方形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

平移 旋轉 翻面 縮放

3. 影片中有幾種顏色的魚？

- 兩種 三種 四種

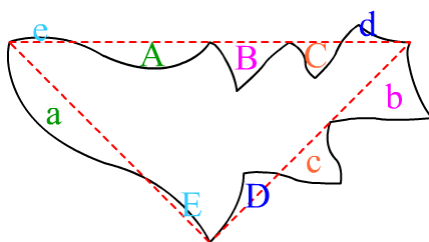
4. 鋪滿數學舞台的魚們有哪些特色？

- 不重疊 無空隙 外形都一樣大

二、如何從數學骨架裁貼出魚

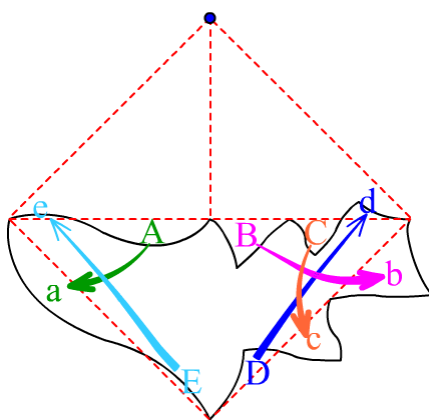
綜合下面三個方式即可裁貼出魚，方式如下：

甲、將等腰直角三角形剪下五個小區塊 A, B, C, D, E，並將這五個小區塊經由翻面、旋轉與縮放後貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$

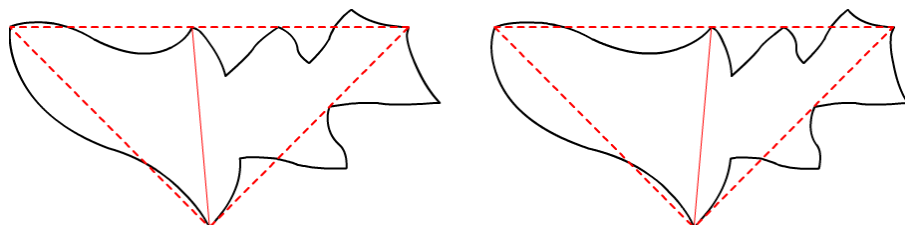


乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的縮放與旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以上方藍點為中心放大 $\sqrt{2}$ 倍並翻面、旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以上方藍點為中心放大 $\sqrt{2}$ 倍並翻面、旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以上方藍點為中心放大 $\sqrt{2}$ 倍並翻面、旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以上方藍點為中心縮小 $\sqrt{2}$ 倍並翻面、旋轉到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊以上方藍點為中心縮小 $\sqrt{2}$ 倍並翻面、旋轉到 e

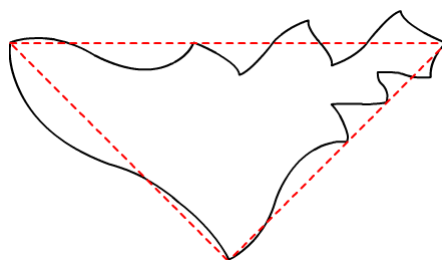


丙、再將此數學骨架的內部做出向左或向右的偏移，得到頭部或尾部較長的魚，如下圖所示：



裁貼出魚後可以發現：等腰直角三角形的其中三個頂點分別在魚的頭尾及鰭上，斜邊的中點本來在魚的另一鰭，但由於接合所需要將其偏移。這就是魚在數學骨架上的正確位置。

丁、另外，由於要在中央的位置將兩個漩渦接合，我們還要設計一隻放在中間用於接合的魚，如下圖所示：

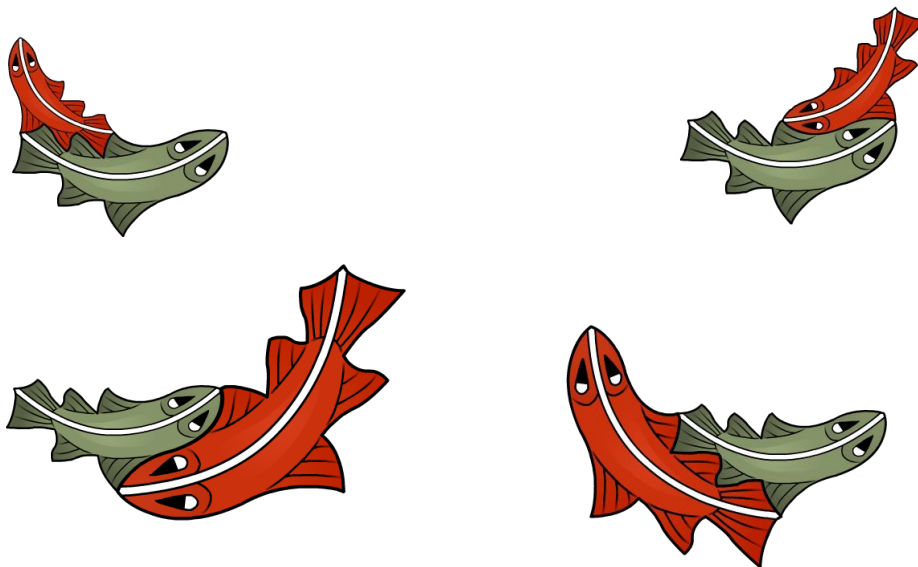


三、真的是魚磁磚嗎

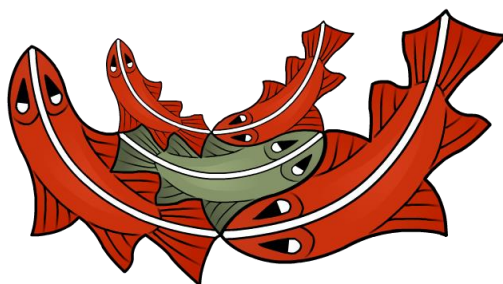
由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魚可以互相密合，其密合方式有四種，我們看看下面：

(1) 兩隻不同傾斜方向的魚之間的四種互相密合：

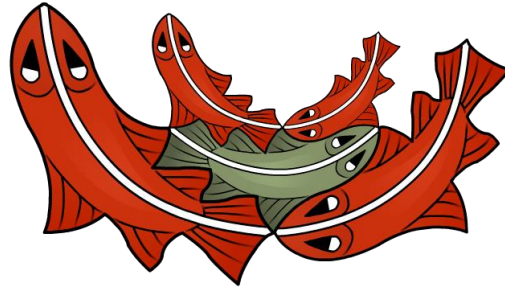
【綠魚為頭部較長，紅魚為尾部較長】



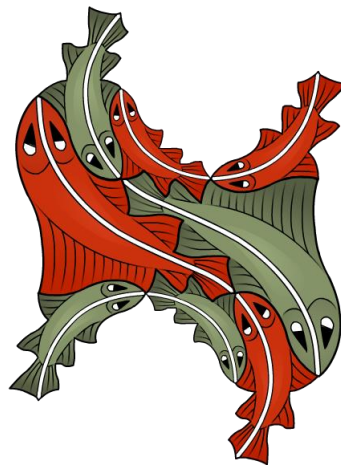
(2) 4隻尾部較長的紅魚包圍1隻頭部較長的綠魚



(3) 4隻頭部較長的紅魚包圍1隻尾部較長的綠魚



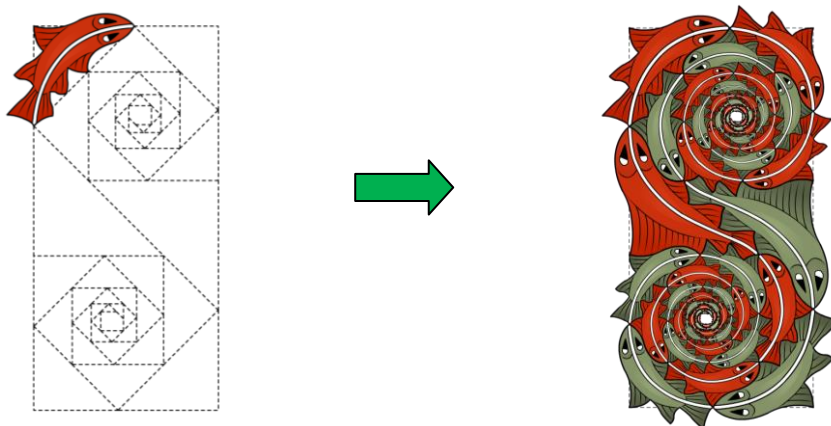
(4) 接合魚之間的密合



以這四種密合方式，搭配接合魚的密合，就可以做出兩個漩渦，並將其接合，使魚磁磚密鋪在平面上了。

四、漩渦的鑲嵌圖

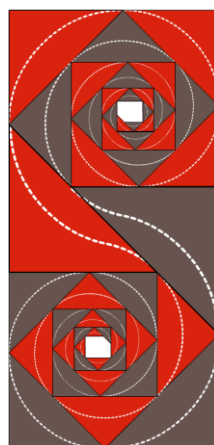
透過了解魚在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出漩渦鑲嵌圖，左下圖是先將紅魚放在數學骨架上的正確位置，其他的魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一縮放後按照密合方式密鋪。



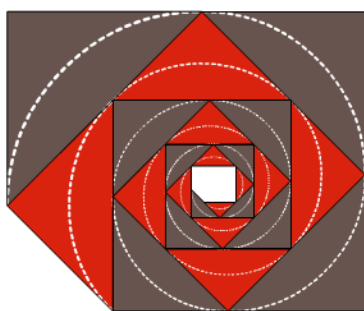
關於艾薛爾的《漩渦》原圖，如下圖一所示：



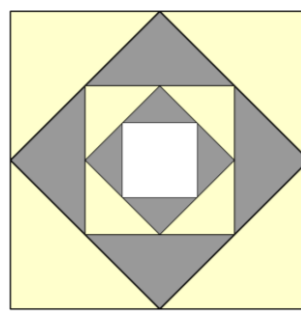
圖一



圖二



圖三



圖四

艾薛爾對此作品的下了一個評註：『我懷疑“所謂大眾”有可能明白、更別提領會在構造這幅圖片之前，有多少在腦中激盪的火花令我著迷了。』

這句話口氣雖不客氣，但我們希望能藉著圖二、三、四。來讓“所謂大眾”多少明白一下艾薛爾腦中的火花是甚麼。圖二為我們為《漩渦》所做的數學骨架分析圖，圖三則是除去中間的接合魚，取其中上半部分的單一個漩渦，來與圖四的等比圖形比較。圖四的等比圖形中，顯然相鄰的黑白等腰三角形之間的邊長比為 $1:\sqrt{2}$ ，但圖三中相接於45度角的灰(紅)色等腰三角形之間的比約為0.84:1【該比的比值為 $r^3 + 2r^2 - 2 = 0$ 之實根】，使兩色等腰三角形之間排成兩個螺旋。

《漩渦》的另外一個重點是，應該會覺得上下各自有一個漩渦，但再仔細觀察之後，其實這裡並非上下各一個，而是觀察紅魚與灰魚。在上半部的中心，我們可以看到一隻灰魚正在逆時針向外游出，逐漸變大，直到中間的接合處有個反曲的接合灰魚，再向下順時針逐漸變小到下半部的中心，這才是漩渦所訴說的第一個漩渦。反之另一個漩渦就是紅魚由下半部中心游到上半部中心的另一漩渦。所以這邊的漩渦其實是兩條完整又有反曲的，雙漩渦曲線的交疊。

漩渦回饋單

1. 請你試著舉例，在自然界中的那些地方看螺線或漩渦的圖形？
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？
 3 隻 4 隻 5 隻 6 隻
3. 請你回想一下，最後的鑲嵌圖中總共有幾種不同形狀的紅魚呢？
 2 種 3 種 4 種
4. 是否有相鄰的兩隻魚的形狀是相似的呢？(只接觸於一點的不算)
 是 否 不一定
5. 魚的表面積與其數學骨架等腰直角三角形的面積是否一樣呢？
 是 否 不一定
6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：