

E133 交錯的六邊形工作單

撰稿：蘇章瑋

引言：《E133 交錯的六邊形》是荷蘭版畫家艾薛爾在1967年12月所繪製的一幅作品，作品中使用三種顏色—深藍色、黑色及白色著色，主要繪畫工具為墨水及水彩。影片中的封面圖是重新以電腦繪製過的作品，如下圖所示：



此作品在全部137張鑲嵌圖中，是唯一一個不含美工圖形，只有簡單幾何圖形的作品。在看過在此編號前後的E131、132、134等三幅作品後，你能聯想到它們之間的關係有多緊密嗎？而本作品中，又要如何才能發掘出其中究竟隱藏了那些幾何形狀？讓我們趕快來欣賞這奇妙的純幾何世界吧！

請在電腦上點選《E133 交錯的六邊形.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、交錯的六邊形的數學與藝術

我們可以把交錯的六邊形的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由等大小的正方形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這正方形正是交錯的六邊形的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個正方形放大，並將此正方形分割為16小塊，其中這16小塊是兩個兩個一組，共8組的互相對應，依數學原理的旋轉及翻轉後可以互相貼到對方的位置上，而分割的線條即由交錯的六邊形中的幾何圖形所劃分。

第三幕：將交錯的六邊形的內部著上底色與兩種顏色互相覆蓋的寬線條，成為一正方形藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的交錯的六邊形的數學骨架們互相密合。

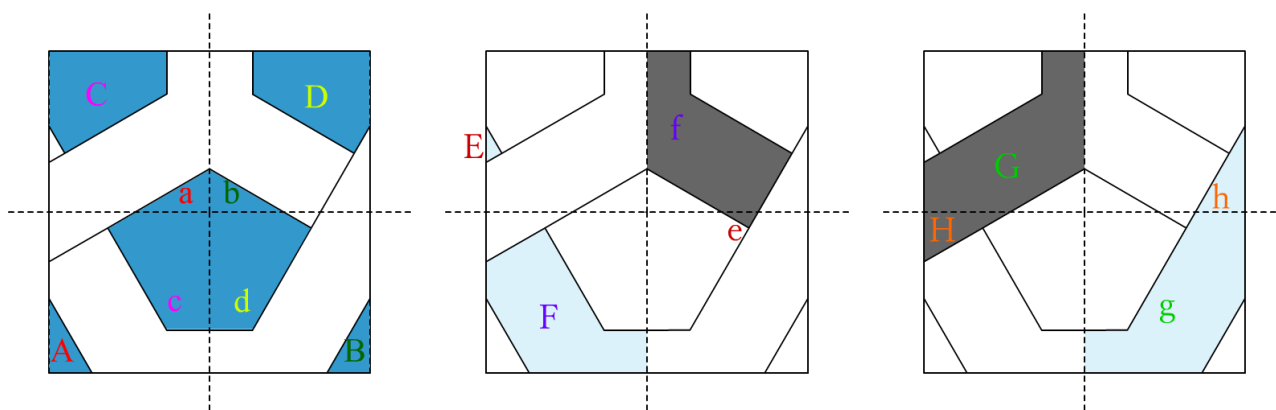
第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將大小相同的交錯的六邊形的數學骨架一個一個放到它們的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。而除了表現其正方形的數學骨架之外，也強調其由兩色六邊形網格交疊後，可以凸顯剩餘底色的五邊形。再者，換一個選取方式，也可以裁剪出等腰直角三角形的數學骨架，或是等腰梯形的數學骨架。而它們依然可以銜接第一幕的的數學舞台，也都可以一個一個放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
 三角形 正方形 矩形
2. 第二幕分割的過程中，用到了哪些數學方法？
 平移 旋轉 翻面 縮放
3. 影片中的數學骨架用了幾種顏色？
 兩種 三種 四種
4. 鋪滿數學舞台的交錯的六邊形的數學骨架們有哪些特色？
 不重疊 無空隙 外形都一樣大

二、如何從數學骨架分割出交錯的六邊形

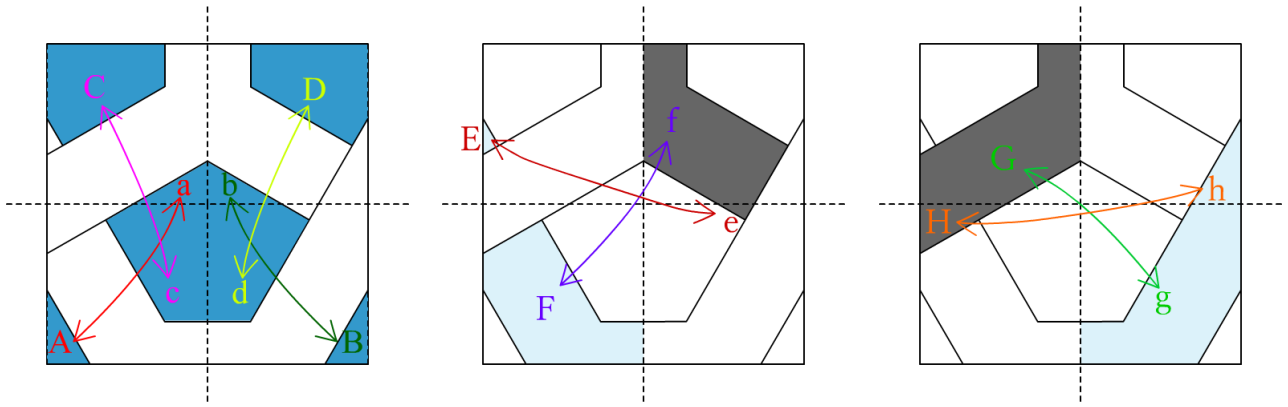
綜合下面兩個方式即可分割出交錯的六邊形，方式如下：

甲、將正方形形分割為16個小區塊 A, B, C, D, E, F, G, H與 a, b, c, d, e, f, g, h，並將這16個小區塊互相貼到相對應的正確的位置上，即 $A \leftrightarrow a$; $B \leftrightarrow b$; $C \leftrightarrow c$; $D \leftrightarrow d$; $E \leftrightarrow e$; $F \leftrightarrow f$; $G \leftrightarrow g$; $H \leftrightarrow h$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移、旋轉與翻面：

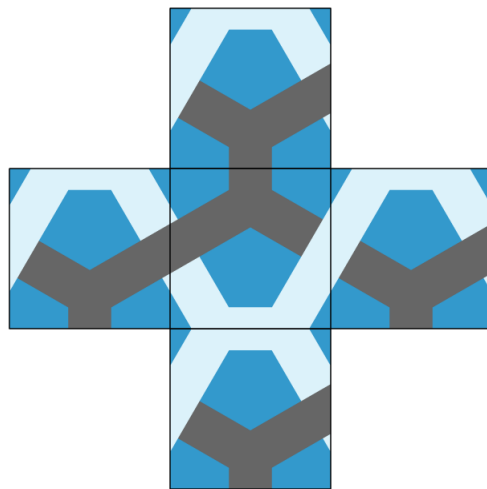
- (1) $A \leftrightarrow a$: 將 A 區塊對左邊中點旋轉到 a，亦可由 a 反向操作到 A
- (2) $B \leftrightarrow b$: 將 B 區塊對右邊中點旋轉到 b，亦可由 b 反向操作到 B
- (3) $C \leftrightarrow c$: 將 C 區塊對左邊中點旋轉到 c，亦可由 c 反向操作到 C
- (4) $D \leftrightarrow d$: 將 D 區塊對右邊中點旋轉到 d，亦可由 d 反向操作到 D
- (5) $E \leftrightarrow e$: 將 E 區塊對鉛直平分線翻轉後，再對右邊中點旋轉到 e，亦可由 e 反向操作到 E
- (6) $F \leftrightarrow f$: 將 F 區塊對鉛直平分線翻轉後，再對右邊中點旋轉到 f，亦可由 f 反向操作到 F
- (7) $G \leftrightarrow g$: 將 G 區塊對鉛直平分線翻轉後，再對右邊中點旋轉到 g，亦可由 g 反向操作到 G
- (8) $H \leftrightarrow h$: 將 H 區塊對鉛直平分線翻轉後，再對右邊中點旋轉到 h，亦可由 h 反向操作到 H



分割完交錯的六邊形的正方形骨架後可以發現：正方形的鉛直平分線與水平平分線恰好與原先的顏色交互分割出這16塊，使其相互對應，而且正方形骨架是交錯的六邊形中最小與最方正的數學骨架。

三、 真的是交錯的六邊形磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的交錯的六邊形的數學骨架可以互相密合，其密合方式有四種，我們看看下圖：

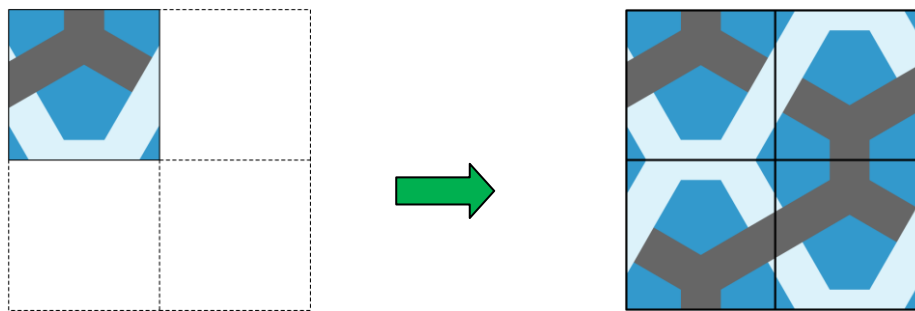


上圖中間的數學骨架分別對其四個邊的中點各旋轉180度，這樣正好讓相同顏色的六邊形網格互相相連，剩餘的底色部分也可以合成為一個完整的五邊形。以這種密合方式，就可以將交錯的六邊形的正方形磁磚密鋪在平面上了。

四、 交錯的六邊形的鑲嵌圖

甲、交錯的六邊形鑲嵌圖

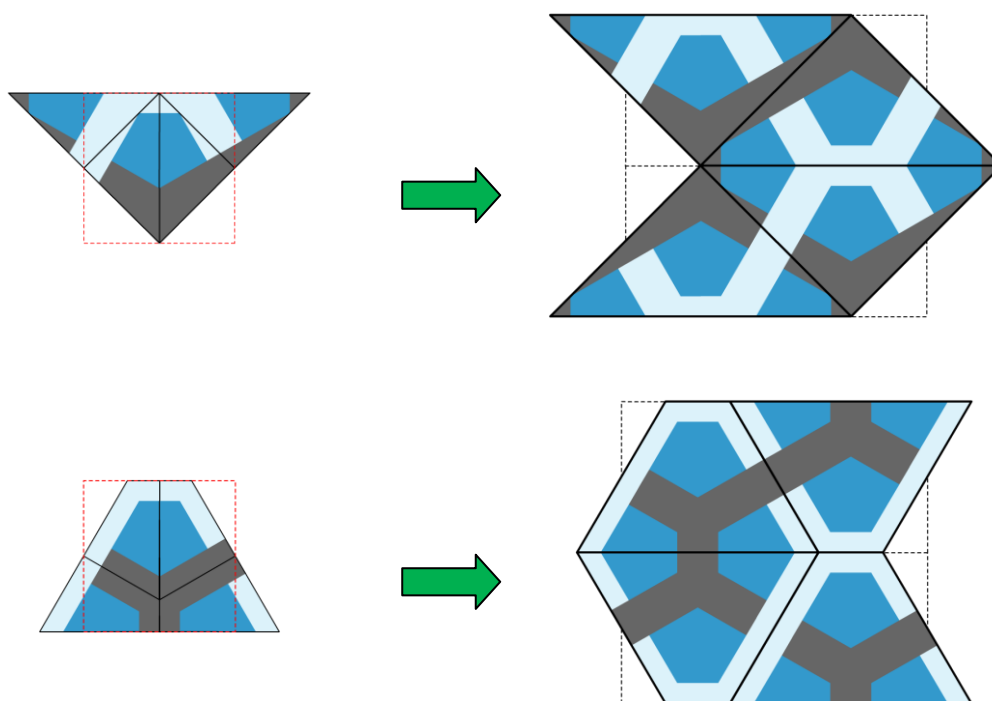
透過了解交錯的六邊形在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出交錯的六邊形鑲嵌圖，左下圖是先將一個交錯的六邊形放在數學骨架上的正確位置，其他的交錯的六邊形除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一旋轉後按照密合方式密鋪。



關於艾薛爾的《E133 交錯的六邊形》原圖，如下圖所示：



數學骨架為正方形的交錯的六邊形，在畫面中卻讓你比較容易看出黑色六角形網格與白色六角形網格，這兩色的網格還交錯覆蓋對方，沒有被覆蓋到的部分看起來又是一個五邊形。這些形狀是偶然的嗎？還是精密計算之下得到的結果？而對你來說，要是讓你自行選擇，你會用甚麼樣的形狀去作為他的數學骨架呢？而在下面另外兩種分割中，在其數學骨架中的分割線又代表那些意義呢？



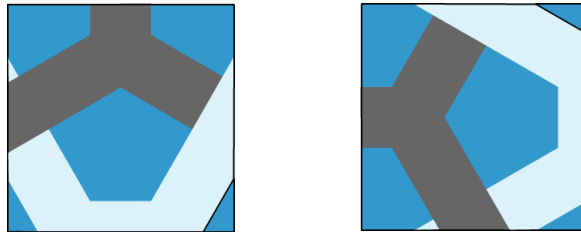
乙、交錯的六邊形拼圖遊戲

看到這裡是否對交錯的六邊形鑲嵌有了更進一步的了解，下面是為大家精心準備好玩且有趣的交錯的六邊形A與B的兩個拼圖遊戲，請再仔細觀察交錯的六邊形鑲嵌圖的排列方式，遊戲開始囉！

請在電腦上點選《E133 交錯的六邊形A拼圖.exe 與 E133 交錯的六邊形B拼圖.exe》進入拼圖的首頁，並按左上角的Q版圖開始遊戲。

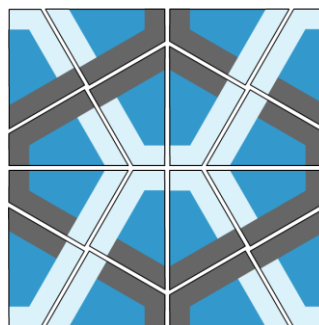
E133 交錯的六邊形回饋單

1. 請你回想一下，每一個交錯的六邊形的正方形數學骨架周遭圍繞著幾個交錯的六邊形的正方形數學骨架呢？
 3 個 4 個 5 個 6 個
2. 除了一開始的正方形數學骨架，你還在影片中看到哪種形狀的數學骨架？
 正三角形 等腰直角三角形 等腰梯形 不等邊四邊形
3. 交錯的六邊形的正方形數學骨架中，深色與淡色網格線的面積是否一樣呢？
 是 否 不一定
4. (1)你能只平移（不旋轉）下面兩個數學骨架，使他們同色的網格線相接嗎？



(2)若上圖不能只靠平移使他們相接，你要加上怎樣的數學方式才能使他們相接呢？

5. 下圖為將一部分的《E133 交錯的六邊形》鑲嵌圖重新分割為 16 塊的樣子，每一塊小分割都是同樣形狀的不等邊四邊形。但是每一塊長的都頗為相似，請問你能分辨出下面只有幾種不同配色方式的不等邊四邊形嗎？
 2 個 4 個 8 個 16 個



6. 關於影片(含拼圖遊戲)與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：