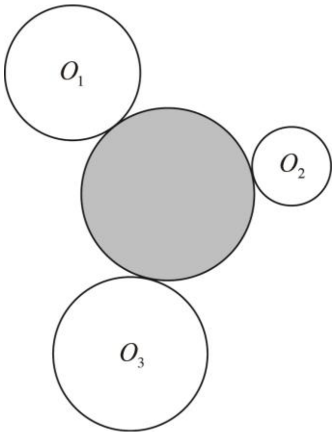
12 精準的數學工藝……尺規作圖問題



阿波羅尼奧斯問題[1]

12.1 尺規作圖的意義與定義

『尺規作圖』，顧名思義，就是利用直尺與圓規，在有限步驟內作圖。尺規作圖包括作出數線上的點（或線段長）、平面上的點（或座標）、直線、夾角、圓或其它圖形。

像這樣，找點、畫線、求角、作圓的尺規作圖問題，首先需對可以使用的工具「直尺」與「圓規」作精準的規範與要求：即直尺上僅刻有單位長度的刻度，而且直尺與圓規的功能僅為

直尺功能：僅能畫通過兩個已知點的直線；
圓規功能：僅能畫以一已知點為圓心，已知線段為半徑的圓。

在這樣嚴格要求之下，且在有限步驟內，所能作出的點、直線、線段長、角或圓才叫做可以尺規作圖。

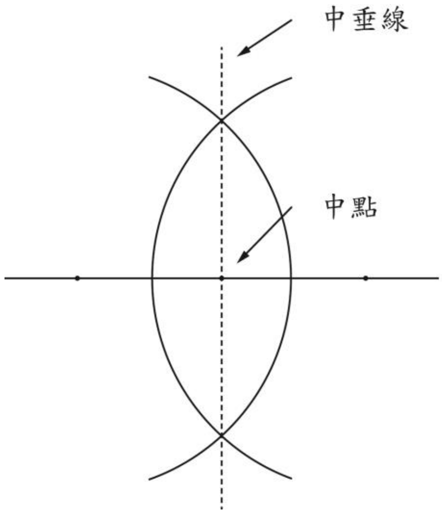
在繼續探討尺規作圖之前，先回憶一下國中所學過的三大重要的尺規作圖方法：

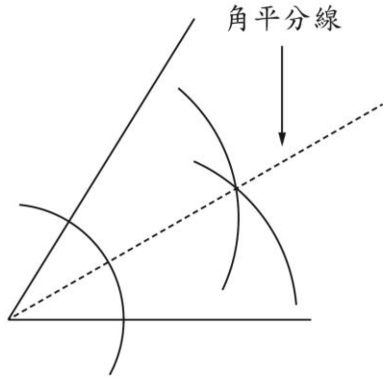
Ⅰ：給定任一線段，作此線段的「中垂線」。

Ⅱ：給定任一線段，求此線段的「中點」（在(1)的中垂線與此線段的交點即是）。

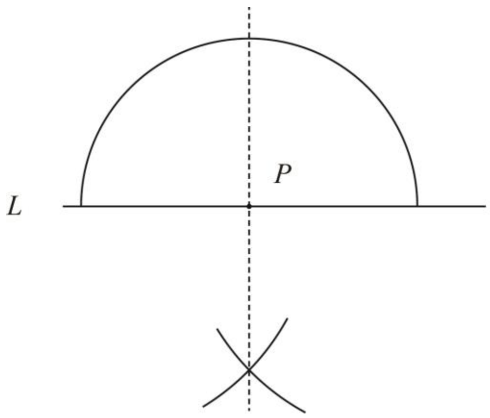
Ⅲ：給定任意一個夾角，畫此夾角的「角平分線」。

[1] 阿波羅尼奧斯問題是阿波羅尼奧斯在他的著作《論接觸》中的一則尺規作圖問題。題目是說：「平面上給定三個互不相交的圓（含圓心），利用直尺與圓規求作一圓，使得此圓與給定的三圓都外切。」據說阿波羅尼奧斯在書中解決了這個問題，可惜的是，《論接觸》這本書早已失傳了。

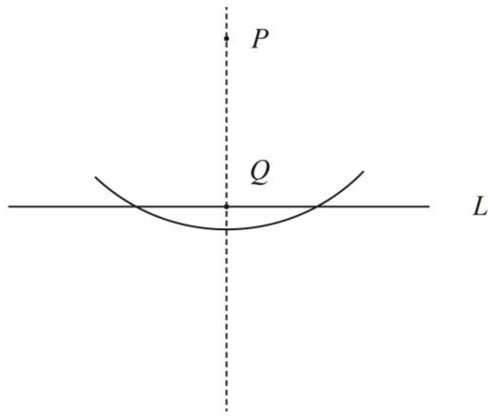




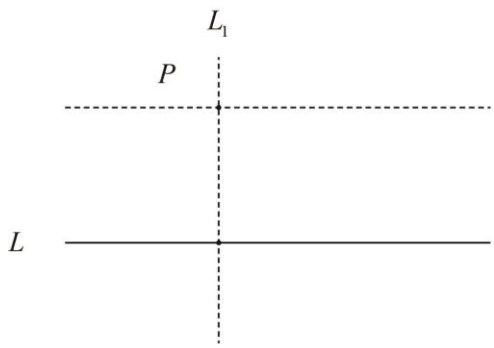
有了國中三大尺規作圖方法，我們可以瞭解：給定一個三角形之後，此三角形的五心（垂心、重心、外心、內心、旁心）是可以尺規作圖的。除了國中三大尺規作圖方法之外，下圖中的四種作圖方法也是我們耳熟能詳的：



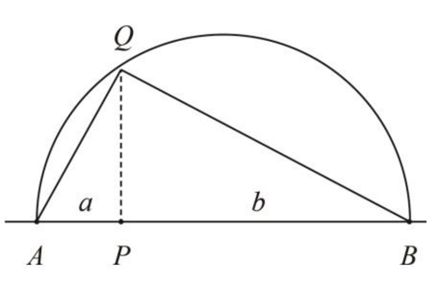
Ⅳ：給定直線L及L上一點P
求作過P點且與L垂直的直線



Ⅴ：給定直線L及L外一點P
求作過P點且與L垂直的直線



Ⅵ：給定直線L及L外一點P
求作過P點且與L平行的直線



Ⅶ：給定長度為a與b的線段
求作長度為$\sqrt{ab}$的線段

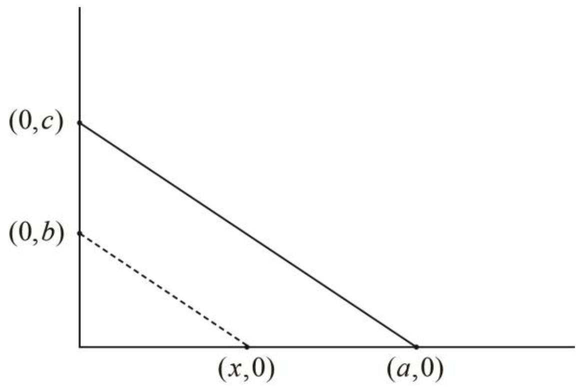
將第Ⅶ作圖法稱為開根號作圖法：

開根號作圖法：若長度為a,b的線段是給定（或可作圖）的，則長度為$\sqrt{a\cdot b}$的線段也是可以尺規作圖的。另有一個經常用到的比例式作圖法。

比例式作圖法：若長度為a,b,c的線段是已知（或可作圖）的，且x滿足比例式

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c},$$

則長度為x的線段也是可以尺規作圖的。我們將x的尺規作圖方法用下圖來說明：



12.2 尺規作圖的初淺推論

有了前一節的尺規作圖方法之後（特別是開根號與比例式作圖法），有更多的線段長是可以尺規作圖的。

定理 12.1 若長度為a,b的線段是給定（或可作圖）的，則長度為

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{b}{a},\ \sqrt{a}$$

的線段也是可以尺規作圖的。

【證明】$a+b,a-b$可以尺規作圖是容易的。ab可以尺規作圖是由比例式作圖法的比例式

$$\frac{ab}{a}=\frac{b}{1}$$

得到（$a,b,1$是可作圖的）。同樣，$\frac{b}{a}$可以尺規作圖是由比例式

$$\frac{\frac{b}{a}}{1}=\frac{b}{a}$$

得到。而$\sqrt{a}$可以尺規作圖是由開根號作圖法的

$$\sqrt{a}=\sqrt{a\cdot 1}$$

得到。

定理 12.2 若數線上座標為a,b,c的點是給定（或可作圖）的，則一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

的根是可以尺規作圖的。

【證明】一元二次方程式的根為

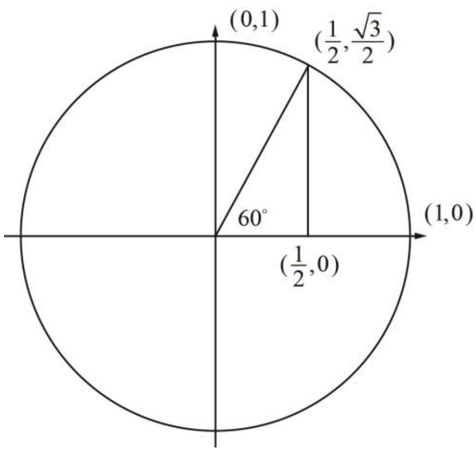
$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由定理 12.1 知道：$-b,b^2-4ac,2a$都是可以尺規作圖的。因此，再由定理 12.1 知道：

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

是可以尺規作圖的。

誠如前言，尺規作圖是在數線上求點或者是在平面上找座標、畫角、作線、求圓等。但是有時候，數線上求點、平面上找座標、或者平面上畫角度有可能是同一回事。例如下圖



告訴我們：

在數線上求作$\dfrac{1}{2}$所在位置的點。

在平面上畫60°的角度。

在平面上找座標為$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$的點。

這三則尺規作圖問題是等價的。又因為「在數線上求作$\dfrac{1}{2}$所在位置的點」相當於「求一單位線段的中點」。因此根據國中三大尺規作圖方法：上述三則問題都可以尺規作圖。

例題 1　正五邊形可以尺規作圖。

【證明】在單位圓上，五個點

$$(1,0),\left(\cos\frac{2\pi}{5},\sin\frac{2\pi}{5}\right),\left(\cos\frac{4\pi}{5},\sin\frac{4\pi}{5}\right),\left(\cos\frac{6\pi}{5},\sin\frac{6\pi}{5}\right),\left(\cos\frac{8\pi}{5},\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

剛好構成正五邊形。因此，只要證明點座標

$$\left(\cos\frac{2\pi}{5},\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

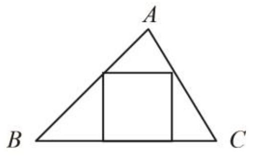
可以尺規作圖，那麼正五邊形就可以尺規作圖。由此知道：關鍵在$\cos\dfrac{2\pi}{5}$是否可以尺規作圖。但是由三角學知道

$$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \ (\,x=2\cos\frac{2\pi}{5}\text{ 滿足方程式 }x^2+x-1=0\,),$$

所以$\cos\dfrac{2\pi}{5}$可以尺規作圖。即正五邊形可以尺規作圖。

在這一節裡，我們建立了一些初淺的可尺規作圖的理論。但是有時候，理論知道可以尺規作圖是一回事，如何寫下漂亮的尺規作圖過程又是另一回事。底下就是一則很好的例子。

例題 2　平面上給定一個三角形ABC（$BC=a$，A點至BC的距離$=h$）。試問：圖中所畫的正方形是否可以尺規作圖。



【證明】如下左圖，添 A 至 BC 垂直線，並設正方形的邊長為 l。由三角形相似性質得到：

$$\frac{l}{h}=\frac{x_1}{x_1+y_1}=\frac{x_2}{x_2+y_2}.$$

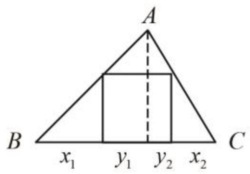
由此等式推得

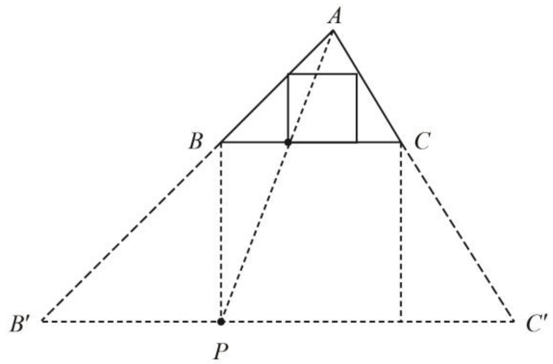
$$\frac{l}{h}=\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+y_1+y_2}=\frac{a-l}{a}\Rightarrow l\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)=1.$$

因此

$$l=\frac{ah}{a+h}.$$

因此，此正方形是可以尺規作圖的。





從上述 l 的公式知道：此正方形是可以尺規作圖的。但是如何畫此正方形呢？比較遜的方法是：先在數線上作出 l 的長度。再作一平行於 BC 且相距為 l 的直線。那麼此直線與 AB, AC 相交的點即為正方形的兩個頂點。

在這裡，我們提出一個比較賞心悅目的作圖方法：

步驟一：以 BC 為邊，畫一正方形（如圖虛線部分）。

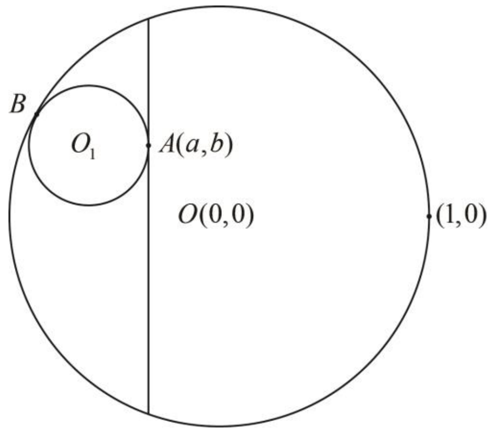
步驟二：AP 與 BC 的交點為欲作正方形之頂點。

12.3 尺規作圖的例子

例題 3　如下圖：以原點$O(0,0)$為圓心的單位圓內，給定一定點$A(a,b)$，並畫通過A點與x軸垂直的直線。

(1) 證明：與此直線相切於A點，又與單位圓內切的圓O_1是可以尺規作圖的。

(2) 寫下尺規作圖的過程。



【證明】

(1) 設此圓的半徑為r，那麼$(a-r,b)$為此圓的圓心，且滿足

$$\sqrt{(a-r)^2+b^2}=1-r \Rightarrow (a-r)^2+b^2=(1-r)^2$$
$$\Rightarrow r=\frac{1-\left(a^2+b^2\right)}{2(1-a)}.$$

因為$A(a,b)$為給定的點，所以半徑r是可以尺規作圖的。

(2) 比較不上道的尺規作圖方法為：將(1)的證明中所得到的r，利用尺規作圖作出，再畫所要的圓。在這裡我們提供一則比較賞心悅目的作圖方法。首先觀察，A,B與$(1,0)$三點好像會共線。首先證明這個觀察。令直線BA與x軸相交於C點。顯然O,O_1,B三點共線，又三角形BO_1A為等腰三角形（因為A,B為以O_1為圓心的圓上）。因為O_1A平行於OC，所以三角形BOC亦為等腰三角形。因此$BO=1=OC$，即$C=(1,0)$，得證。

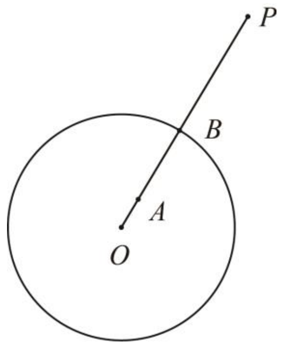
有了$A,B,(1,0)$三點共線之後，求內切圓的尺規作圖問題就漂亮多了：

步驟一：畫通過$(1,0)$與A點的直線，令其交單位圓於B點。

步驟二：作線段AB的中垂線，令其與直線OB相交於O_1。

步驟三：以O_1為圓心，O_1A為半徑，所畫的圓就是我們要的圓。

例題 4　如下圖：以原點O為圓心的單位圓內，給定一定點A，並畫通過O點與A點的直線交圓於B點。如果$OA \cdot OP = 1$，則稱P點為A點的反演點。試問：P點是否可以尺規作圖。



【證明】略。

12.4 古希臘時代三大尺規作圖難題

古希臘幾何的三大尺規作圖難題：

化圓為方問題：求作一正方形，使其面積與半徑為 1 的圓相等。

倍立方問題：求作一個正立方體，使其體積與邊長為 1 的正方體的 2 倍。

三等分角問題：將一給定的角三等分。

這三大尺規作圖問題已知道是不可以尺規作圖的，其中三等分角問題，有些角是可以三等分的，但是大部分的角都沒辦法三等分（例如60°就沒辦法三等分，也就是說，20°是沒辦法尺規作圖的）。

在 1796 年，高斯證明正十七邊形是可以尺規作圖的。這是繼正三角形，正五邊形之後下一個可以尺規作圖的質數邊正多邊形。相傳阿基米得可以做正七邊形，事實上，正七邊形是沒辦法尺規作圖的。最後值得一提的是，馬歇羅尼於 1797 年證明只用圓規可以作所有尺規作圖的題目。這就是有名的『莫爾-馬歇羅尼定理』。

習題 1　給定19°的角。試著以尺規作圖作出角度為1°的角。

習題 2　給定一圓及圓上一點P。問：通過P且與此圓相切的直線是否可尺規作圖？

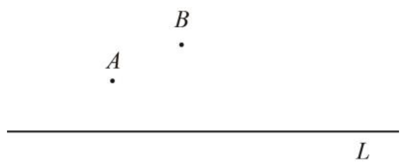
習題 3　試著以尺規作圖作出長度為

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

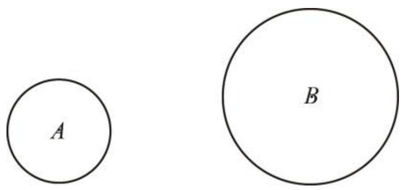
的線段長。

習題 4　設A,B,C為平面上不共線的三已知點。作一直線使得A,B,C至直線的距離都相等。一共可作出有多少條這樣的線？

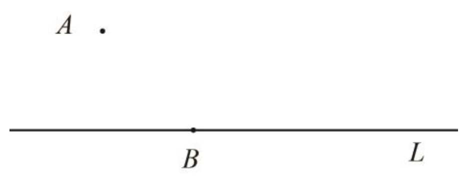
習題 5　如圖所示，給定直線L及同側的A,B兩個點。求作過A,B兩點，且與直線L相切的圓。



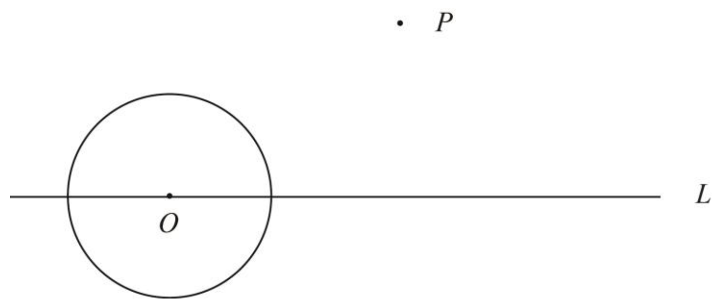
習題 6　給定兩相離的圓及它們的圓心。求作此兩圓的內、外公切線。



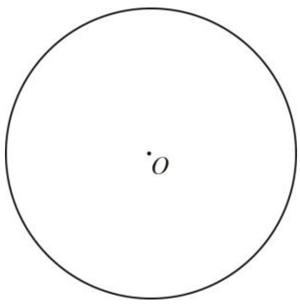
習題 7　給定直線L，L上一定點B及L外一點A。求作與直線L相切於B點，又通過A點的圓。



習題 8　阿尺正在做數學老師出的一則尺規作圖問題：作通過點 P 且垂直直線 L 的直線。阿尺正拿著圓規，隨便在直線 L 上找一個點 O 當圓心，以任意的半徑畫出一圓（如圖所示）。就在這時候，阿尺的鄰居找他玩遊戲，阿尺馬上丟下作業，玩遊戲去了。一直玩到很晚，當阿尺回家重新寫作業時，不知圓規跑到哪裡去了。如今，阿尺僅剩下直尺可用。試問：阿尺有辦法完成他的尺規作圖問題，趕在隔天早上交給老師嗎？



習題 9　拿破崙是個不錯的幾何學家，他提出過這樣一個問題：「紙上有一個圓及該圓的圓心，只用圓規（沒有直尺），如何把這圓的圓周四等分。」你能解決拿破崙這問題嗎？

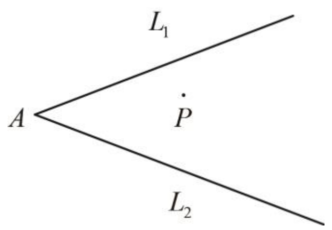


動手玩數學

在平面上給定三條兩兩平行的直線 L_1, L_2, L_3（L_1 與 L_2 相距為 a，L_2 與 L_3 相距為 b，L_1 與 L_3 相距為 $a+b$）。是否可以分別在直線 L_1, L_2, L_3 上各取一點 A, B, C 使得 ABC 是一個正三角形。

挑戰題

如圖所示，點 P 在射線 L_1, L_2 的銳夾角區域內。試以尺規作圖，作一通過 P 點，且與射線 L_1, L_2 相切的圓。



參考文獻

[1] Robin Hartshorne, Geometry: Euclidean and Beyond, UTM, Springer.

[2] A. S. Posamentier and C. T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications.

精準的數學工藝……尺規作圖問題的習題解答

習題 5

作圖步驟如下：

(1) 作直線 AB，與直線 L 交於 P 點。

(2) 求作長度 $\sqrt{PA \times PB}$。

(3) 在直線 L 上取一點 D 使得 $PD = \sqrt{PA \times PB}$（這樣的 D 點有兩點）。

(4) 過 D 點作垂直於 L 的垂線，作 AB 的中垂線。兩線相交於 O 點。

(5) 以 O 為圓心，OD 為半徑，此圓為所求。（會做出兩個圓，除非 AB 與 L 平行）

習題 6

作圖步驟如下：設圓心為 A, B 兩圓的半徑分別為 r_1, r_2：

(1) 以 B 為圓心，畫一半徑為 $r_3 = r_2 - r_1$ 的圓 Γ_1。

(2) 因為 r_3, AB 是可以作圖的，所以 $r_4 = \sqrt{AB^2 - r_3^2}$ 也是可以作圖的。以 A 為圓心，畫一半徑為 r_4 的圓 Γ_2，令 Γ_1, Γ_2 兩圓相交於 C 點（其實相交於兩個點，取其中的一個點叫 C）。（由畢氏定理知道：三角形 ABC 是直角三角形。）

(3) 射線 BC 交以 B 為圓心的圓於 D 點。

(4) 過 D 點作平行於 AC 的直線，此直線為兩圓的外公切線之一，另一外公切線同理可得到。

(5) 內公切線的作法與外公切線的作法雷同，讀者練習模仿即可。

習題 7

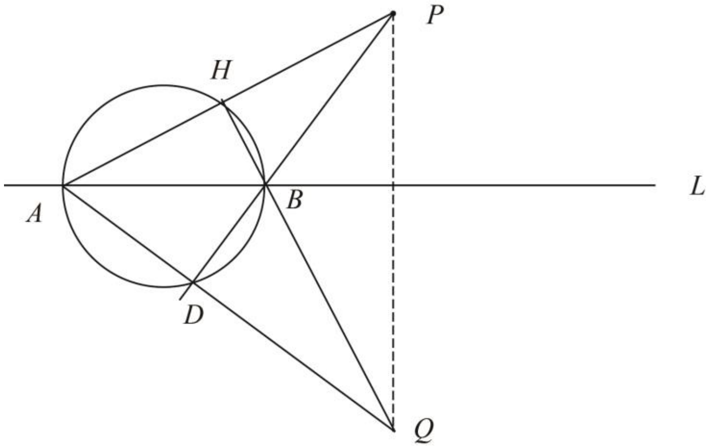
作圖步驟如下：

(1) 作 AB 的中垂線，過 B 點作 L 的垂線，令兩線相交於 O 點。

(2) 以 O 為圓心，OB 為半徑畫一圓，此圓為所求。

習題 8

如下圖，設圓與直線的交點為 A 與 B。連接直線 PA 與 PB，令這兩條直線與圓相交於 H 與 D 兩點。再連接直線 HB 與 AD，令其交點為 Q。接下來證明：直線 PQ 與原來的水平線垂直。因為 AB 是直徑，所以 $\angle AHB = \angle ADB$，即對三角形 APQ 而言，QH 垂直 AP，PD 垂直 AQ。因此 B 是三角形 APQ 的垂心，所以 AB 與 PQ 必垂直。



習題 9

假設此圓的半徑為 r。將作法分成五部分：

(1) 在圓周上任取一點 A，並以 A 為圓心，$AO = r$ 為半徑畫一弧（如下圖左圖所示）交圓周於 X 點；再以 X 點為圓心，$AO = r$ 為半徑畫一弧（如下圖左圖所示）交圓周於 Y 點；再以 Y 點為圓心，$AO = r$ 為半徑畫一弧（如下圖左圖所示）交圓周於 C 點。顯然，A,O,C 三點共線（因為只有圓規，所以這條直徑的線是無法畫出來的）。

(2) 考慮三角形 AXY：因為 $AX = XY = r, \angle XAY = 30^{\circ}$，所以 $AY = \sqrt{3}r$。同理，

$CX = \sqrt{3}r$ 。

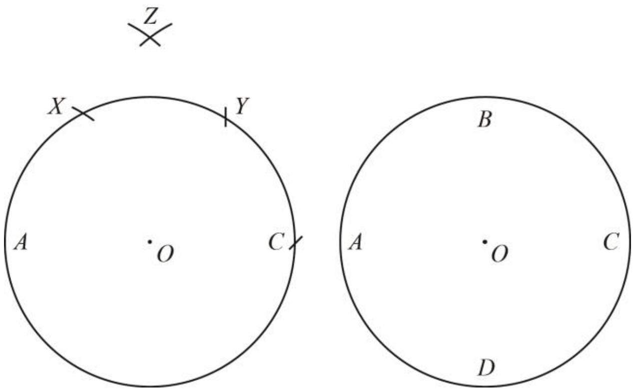
(3) 分別以 A,C 為圓心，$AY = \sqrt{3}r = CX$ 為半徑畫一弧（如下圖左圖所示），設兩弧相交

於 Z 點。

(4) 因為 Z 點在線段 AC 的中垂線上，所以三角形 AOZ 是直角三角形。利用畢氏定理得到

$$AO^2 + OZ^2 = AZ^2 \Rightarrow OZ = \sqrt{2}r.$$

(5) 考慮下圖的右圖：以 A 為圓心，$OZ = \sqrt{2}r$ 為半徑畫一圓交此圓於 B, D 兩點；再以 B 為圓心，$OZ = \sqrt{2}r$ 為半徑畫一弧交此圓於 C 點。容易推得 A, B, C, D 剛好將此圓周四等分。



動手玩數學參考解答

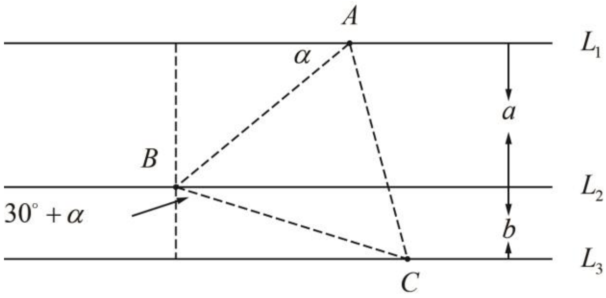
如下圖：設三角形 ABC 是邊長為 d 的正三角形。由角度關係知道

$$\sin\alpha = \frac{a}{d},\ \cos\left(30^\circ + \alpha\right) = \frac{b}{d}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\cos\left(30^\circ + \alpha\right) = \frac{b}{d} &\Rightarrow \cos 30^\circ \cos\alpha - \sin 30^\circ \sin\alpha = \frac{b}{d} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2 = \left(\frac{a}{2d} + \frac{b}{d}\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \frac{(a+2b)^2}{4d^2} \\
&\Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.
\end{aligned}$$

由 d 的公式知道：正三角形是可以尺規作圖的。



挑戰題參考解答

作圖步驟如下：

(1) 作$\angle A$的分角線L。

(2) 過P點作直線L的垂線，此垂線交L於H點，交L_2於B點。

(3) 在線段HB上取一點P'使得$HP = HP'$。

(4) 求作長度$\sqrt{BP \times BP'}$。

(5) 在線段AB上取一點D使得$BD = \sqrt{BP \times BP'}$。

(6) 過D點作與L_2垂直的垂線，交直線L於O點。

(7) 以O為圓心，為OD半徑，此圓即為所求。