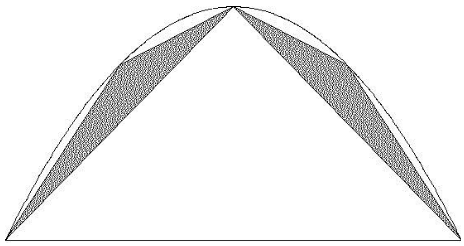
11 數學瑰寶……拋物線與二次函數



$y=-0.25x^2+4$

阿基米德對拋物線施予「窮舉法」的魔棒[1]

針對二次函數

$$f(x)=ax^2+bx+c,\quad (a\neq 0)$$

而言。從方程式 $f(x)=0$ 的角度來說，婆羅摩笈多求出它的根的漂亮『代數』公式：

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

從函數 $y=f(x)$ 的幾何圖形之觀點來看，伽利略的『自由落體』實驗實證了「凡是向空中拋一石頭，它的軌跡都可由這樣的函數來刻畫」，用拋物線一詞來描繪它的圖形再恰當不過了。

在中學的數學課程裡，既能交流『代數』、又可溝通『幾何』、也要實證『自然界』的教材實在不多，二次函數就是絕佳的例子。現在就讓我們一同來欣賞這數學瑰寶……拋物線與二次函數。

[1] 阿基米得求拋物線扇形區域面積的方法是先畫出以弦為邊的三角形，再對此三角形的另兩邊畫出以他們為邊的三角形，……，依此類推。阿基米得發現這一連串的三角形面積依幾何數列減少，它們的面積和是第一個三角形面積的 $\frac{4}{3}$ 倍，這也是此拋物線扇形區域的面積。阿基米得也想將他的「窮舉法」魔棒用在橢圓與雙曲線上，結果都失敗。阿基米得只猜測整個橢圓內部的面積為 πab（a,b 分別是橢圓長、短軸的長度），至於這公式的證明則有賴微積分發明之後才得到解答。

11.1 印度古有的二次方程式的代數公式解

二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0)$$

之根的公式解為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

這是大家耳熟能詳的數學公式。公式最早出現在印度數學家婆羅摩笈多於西元 628 年所寫的《算數講義》這章的內容裡。

例題 1　古代巴比倫人考慮過這樣的數學問題：有一個矩形，『面積』與『長寬差』的和為 183；而『長』與『寬』的和為 27。求這矩形的長與寬分別是多少？

【解】設矩形的長 x，寬 y。根據題意得到

$$\begin{cases} xy+x-y=183, \\ x+y=27. \end{cases}$$

將 $y=27-x$ 代入第一式得到

$$\begin{aligned} x^2-29x+210=0 &\Rightarrow x=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4\cdot 210}}{2} \\ &\Rightarrow x=14,15 \\ &\Rightarrow (x,y)=(14,13)\ \text{或}\ (15,12). \end{aligned}$$

例題 2　求方程式

$$x^4-10x^3+23x^2-10x+1=0$$

的根。

【解】這方程式看起來是四次，不過 x^4 項與常數項的係數一樣，x^3 項與 x 項的係數也一樣。對於這樣的方程式，古代數學家提供一個妙的方法，將四次轉成兩次。就讓我們來欣賞他們的智慧吧！

令變數 u 為

$$u = x + \frac{1}{x}.$$

原方程式除以 x^2 之後，可整理成為

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 23 = 0 &\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 21 = 0 \\ &\Rightarrow u^2 - 10u + 21 = 0 \\ &\Rightarrow (u-3)(u-7) = 0 \\ &\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3, 7 \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ 或 } x^2 - 7x + 1 = 0.\end{aligned}$$

用公式解得到

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

11.2 伽利略的自由落體實驗

古希臘哲學家亞里斯多德關於『自由落體』的學說是「重的物體比輕的物體先落地」。這個學說表面上看來，似乎很合理，而且人人也都相信以亞里斯多德的智慧是不可能犯錯的。但是，出生於意大利比薩城的伽利略，在 1590 年於比薩斜塔做『自由落體』的實驗，他發現「物體的掉落距離（從靜止開始算起）和時間的平方成正比，與物體輕重無關」，推翻了亞里斯多德的學說。這也說明了「將石頭用力往空中拋，它的軌跡是某一個二次函數的圖形」。

自由落體實驗

拋一球的軌跡

11.3 二次多項式與因數分解

給定一個整係數二次多項式

$$x^2-20x+91.$$

想要將它作因式分解，有兩種方法。其一是利用根的代數公式，其二是採取『十字交乘法』。以本例來講，如果是用『十字交乘法』作因式分解，那麼先要對常數項 91 作因數分解，得到 $91=7\times 13$。因此，『十字交乘法』告訴我們

$$x^2-20x+91=(x-7)(x-13).$$

雖然『十字交乘法』看似簡單，但是他有許多妙用。就以下面的例題說明：

例題 3　試求方程式

$$253125x^2+100x-256=0$$

的根。

【解】將原方程式的係數分解得到

$$3^4\cdot 5^5x^2+2^2\cdot 5^2x-2^8=0$$

採取『十字交乘法』來分解這二次方程式，因為 x 項的係數為 $2^2\cdot 5^2$，所以常數項 2^8 只有一種分解方法，即 2^8 分為 2^2 與 2^6（因 x 項的係數含有 2^2 的因子）。x^2 項的係數 $3^4\cdot 5^5$ 中的 3^4 必放在同一邊（因 x 項的係數沒有 3 的因子），而 5^5 必須分為 5^2 與 5^3（因 x 項的係數含有 5^2 的因子）。

綜合上述討論，所需考慮的情形變成很少，逐一檢驗得到

$$3^4\cdot 5^5x^2+2^2\cdot 5^2x-2^8=\left(3^4\cdot 5^2x-2^6\right)\left(5^3x+2^2\right).$$

因此，原方程式的根為

$$\frac{64}{2025} \text{ 與 } -\frac{4}{125}.$$

例題 4　將式子

$$y^3-xy^2+x^2-y^2-xy+y-1$$

因數分解。

【解】將欲因式分解的式子依 x 與 y 為變數，做降冪排列分別得到

$$x^2-\left(y^2+y\right)x+\left(y^3-y^2+y-1\right) \quad \text{與} \quad y^3-(x+1)y^2-(x-1)y-1.$$

發現以 x 為變數的式子是二次多項式，因此將其常數項再分解得到

$$x^2-\left(y^2+y\right)x+(y-1)\left(y^2+1\right).$$

採取『十字交乘法』作因式分解得到

$$(x-(y-1))\left(x-\left(y^2+1\right)\right)=(x-y+1)\left(x-y^2-1\right).$$

11.4 距離與二次函數

在座標平面上，兩點 (x,y) 與 (a,b) 之間的距離，由於『商高定理』的關係，為

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

這也可以視為廣義的二次函數。因此看到二次函數，有時候必須與『距離』這概念連結在一塊兒。例如

例題 5　如果 x 是實數，那麼

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+13}$$

在 x 多少時，會有最小值。

【解】將式子與『距離』這概念連結在一塊兒，配平方得到

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{(x-0)^2+(0-(-1))^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}.$$

透過『距離』這概念，將式子解釋為：$(x,0)$（此點在 X 軸上）至 $(0,-1)$ 的距離與 $(x,0)$ 至 $(3,2)$ 的距離和。畫個座標圖就知道：當 $(x,0)=(1,0)$ 時，$(0,-1),(1,0),(3,2)$ 三點共線，距

離和最小。因此，當 $x=1$ 時，欲求的函數有最小值 $3\sqrt{2}$ 。

11.5 二次函數的妙用

定理 11.1 如果一個長方體(長×寬×高 $= l_2 \times w_2 \times h_2$)可以擺放在另一個長方體($l_1 \times w_1 \times h_1$)內，那麼不等式

$$l_2 + w_2 + h_2 \le l_1 + w_1 + h_1$$

必須成立。

【證明】請模擬定理 7.2 的證法。

習題 1 解方程式

$$x^2 - (4-i)x + (5-5i) = 0.$$

習題 2 針對二次多項式

$$14x^2 + 53xy + 14y^2 - 13x - 23y + 3.$$

(1) 將它因式分解。

(2) 求

$$14x^2 + 53xy + 14y^2 - 13x - 23y + 3 = 0$$

的所有正整數解 x 與 y 。

習題 3 古代巴比倫人自創一套製造直角三角形三邊邊長的公式「如果 u, v 是正整數，其中 $u > v$ ，而且令 $a = 2uv, b = u^2 - v^2, c = u^2 + v^2$ ，那麼 a, b, c 會是一個直角三角形的三邊邊長。」(這方法的逆命題後來成為很有名的定理)

(1) 證明巴比倫人的結論。

(2) 巴比倫人用這方法發現邊長為 13500, 12709, 18541 的三角形是直角三角形。試找出對應的u,v值。

習題 4 如果a是實數，正實數α是二次方程式$x^2+x-a=0$的一個實數根；而$\dfrac{1}{\alpha}$是二次方程式$x^2-x-a=0$的一個實數根，那麼

(1) 求a的值。

(2) 求α的值。

習題 5 有某種農藥一桶，倒出 8 公升後，用水補滿稀釋，然後又倒出 4 公升，再用水補滿稀釋。此時測得桶中純農藥與水之比為 18:7，則桶的容積是幾公升？

數學瑰寶……拋物線與二次函數的習題解答

習題 1

利用公式解得到兩根為

$$\frac{(4-i)\pm\sqrt{(4-i)^2-4(5-5i)}}{2}=\frac{(4-i)\pm\sqrt{-5+12i}}{2}.$$

令 $a+bi=\sqrt{-5+12i}$ ，兩邊平方得到

$$\begin{aligned}(a+bi)^2=-5+12i &\Rightarrow a^2-b^2+2abi=-5+12i\\ &\Rightarrow \begin{cases}a^2-b^2=-5\\ ab=6\end{cases}\\ &\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2=169\\ &\Rightarrow a^2+b^2=\pm 13 \quad (\text{負不合})\\ &\Rightarrow \begin{cases}a^2=4;\\ b^2=9.\end{cases}\end{aligned}$$

利用 $ab=6$ 解得 $(a,b)=\pm(2,3)$ 。所以兩複數根為

$$\frac{(4-i)\pm(2+3i)}{2}=3+i,1-2i.$$

習題 2

(1) 把它視為 x 的二次多項式時，它的降冪排列式為

$$14x^2+(53y-13)x+(2y-3)(7y-1).$$

採取『十字交乘法』作因式分解得到

$$(7x+2y-3)(2x+7y-1).$$

(2) 由(1)得到

$$14x^2+53xy+14y^2-13x-23y+3=(7x+2y-3)(2x+7y-1).$$

將直線 $7x+2y=3$ 與 $2x+7y=1$ 畫在座標平面上，它們劃過第一象限的部分很短。逐

一檢驗得知：沒有正整數解。

習題 3

(1) 由

$$a^2+b^2=(2uv)^2+\left(u^2-v^2\right)^2=u^4+2u^2v^2+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2=c^2$$

得到。

(2) 巴比倫人的公式中，顯然 a 是偶數，c 是直角三角形的斜邊。因此令

$$\begin{cases}a=2uv=13500,\\ c=u^2+v^2=18541\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u+v)^2=32041=179^2,\\ (u-v)^2=5041=71^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v=179,\\ u-v=71.\end{cases}$$

最後的式子得到 $u=125, v=54$。

習題 4

(1) 由題意知道 $\alpha^2+\alpha-a=0, 1-\alpha-a\alpha^2=0$。將兩式相加得到

$$\begin{aligned}\left(\alpha^2+1\right)-a\left(\alpha^2+1\right)=0\Rightarrow(1-a)\left(\alpha^2+1\right)=0\\ \Rightarrow 1-a=0\\ \Rightarrow a=1.\end{aligned}$$

(2) 因為 $x^2+x-1=0$ 之兩根為

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

且 $\alpha>0$，所以

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

習題 5

設桶的容積為 x（$x>8$）公升。倒出 8 公升農藥後，桶中農藥濃度為 $\frac{x-8}{x}$；再倒出 4

公升後，此 4 公升含農藥 $\frac{x-8}{x}\times 4$ 公升。在這兩次操作之後，總計倒出

$$8+\frac{x-8}{x}\times 4=12-\frac{32}{x}$$

公升的農藥，也就是說桶中有水

$$12-\frac{32}{x}$$

公升。由桶中水的濃度知道

$$\frac{12-\frac{32}{x}}{x}=\frac{7}{18+7}\Rightarrow 7x^2-300x+800=0.$$

解得 $x=40$ 或 $\frac{20}{7}$（不合）。因此，桶的容積為 40 公升。