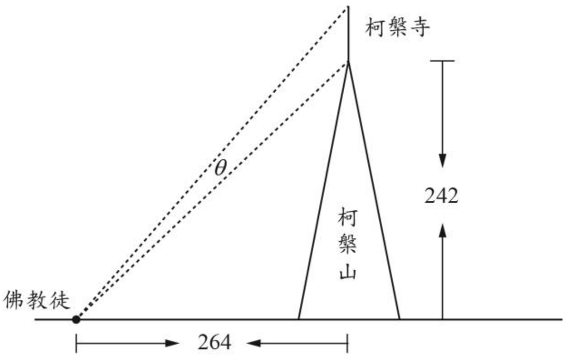
10 宇宙的詩篇……三角學與三角函數



何地點所張的視角 θ 最大 [1]

尋找「直角三角形」、「多點共圓」(四點以上)或「相似三角形」是歐基里德《幾何原本》前六卷的重點，也是利用所謂的「綜合法」來計算或推理演繹平面幾何問題所必學的手段。有了直角三角形，馬上可以使用「邊長之間」的等式關係(畢氏定理)；多點共圓可以作「角度」的轉換(等弧對等圓周角)；而相似三角形就會有「邊長」成比例與「角度」相等的好處。所以「綜合法」可以說是利用「直角三角形」或「相似三角形」來作「邊長」的計算；運用「多點共圓」或「相似三角形」來作「角度」變換的一種方法。

在歐基里德之前的柏拉圖就主張，通過這些幾何的學習培養邏輯思維能力，因為幾何能給予人強烈的直觀印象，將抽象的邏輯規律體現在具體的幾何圖形之中。《幾何原本》的這六卷在 1607 年，由義大利傳教士利瑪竇傳入中國，他與徐光啟合譯成中譯本出版，幾何的名稱就是這樣來的。《幾何原本》的印刷本用各種文字出了一千版以上，從來沒有一本科學書籍像它那樣長期成為廣大學子傳誦的讀物。它流傳之廣，影響之深，僅次於基督教的《聖經》。

傳統的「綜合法」(國中時期的幾何方法)都是單純的計算邊長或者考慮角度的方法。但是，幾何學應該是一門「邊長」與「角度」並重，且應同時考量的學科。因此如何建立溝通『邊』、『角』關係的橋樑定理就變成很重要了，也唯有將『邊』、『角』兩者結合為一才能加速與催化整個幾何學的前進。這個重擔就落在高中的三角學課程裡，特別是『正弦定理』與『餘弦定理』就是扮演整合「邊角關係」的重要定理。利用這種整合了

「邊角關係」的定理來處理幾何問題的方法稱為「三角法」。

在古希臘時期，沒有『正弦定理』與『餘弦定理』可以使用，但是那時期的『托勒密定理』是一個值得重視與介紹的定理。理由是這個定理具有很大的殺傷力，古希臘時期的許多重要定理（包括畢氏定理等）都是這個定理的推論。在圓上的定理，除『托勒密定理』之外，我們也介紹了 1985 年才被大陸的中學教師侯明輝發現的『三弦定理』，據說這個定理可以比『托勒密定理』更省篇幅地證明其它的幾何定理。三弦定理是結合邊長與角度的定理，因此可以說是圓上的「正、餘弦定理」。處理幾何問題的方法，除了國中學過的「綜合法」、高中三角學裡的「三角法」(主要是利用正、餘弦定理解幾何題目）之外，還有利用直角座標來解決幾何問題的「座標法」及利用複數或向量的方法。在本節的最後兩小節也做了入門式的介紹。學習幾何是件辛苦的事情，這可由底下的兩則典故看出。其一為，托勒密國王有一次做一道幾何證明題，接連幾天都沒有做出來，就問歐幾里得:「學習幾何學，難道就不能走一條捷徑嗎？」歐幾里德認為國王想投機取巧，於是不客氣的回答說:「學習幾何學無王者之路！」，意思是說:「求知無坦途」，成為傳誦千古的學習箴言。其二是林肯在《簡短的自傳》裡說的話:「自從他當了議會議員之後，他學習並掌握了歐幾里德的六卷書。他開始專心致志地進行嚴格的腦力訓練，以提高他的才能，特別是他的邏輯和語文能力。由此他喜歡歐幾里德的書，他在巡行時總帶著它們，經常在枕邊放一小蠟燭，學習到深夜，直到他能容易地證明六卷書中的所有命題。而與此同時，一間屋子裡有半打他的律師伙伴們，沒完沒了的鼾聲充斥房間。」

[1]「所張的視角最大問題」是法國數學家雷吉蒙塔努斯在 1471 年提出的。這可能是自古以來第一個極值問題。圖中的情境是作者融入東方文化改編而成。

10.1 三角學基本概念

早在「古埃及金字塔的建築」、「美索不達米亞，巴比倫時期的天文觀測」、「古希臘利用日圭影長計時」等事情上，人們就已經有了「正弦」、「餘弦」、「正切」、「餘切」、「正割」、「餘割」這六個比值的想法，但是將這六個比值視為角度的函數，則是由阿拉伯人開始的。至於「$\sin\theta$」、「$\cos\theta$」、「$\tan\theta$」、「$\cot\theta$」、「$\sec\theta$」、「$\csc\theta$」這六個函數的粉墨

登場，則是十五、六世紀以後的事情了。

例題 1　天文學家巴坦尼曾經研究過「高度為h的日圭，投影長為s時，太陽在水平面上的角度θ的公式」這個問題。問：下列有關巴坦尼問題的公式表示法中，哪些是正確的。

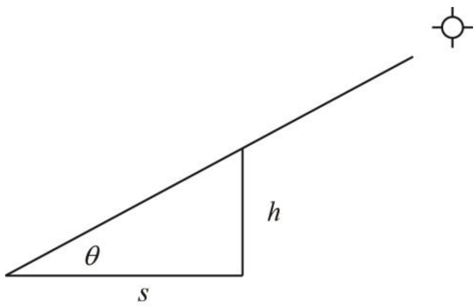
(1) $s=\dfrac{h\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta}$;

(2) $s=\dfrac{h\cos\theta}{\cos(90^\circ-\theta)}$;

(3) $s=h\cot\theta;$

(4) $s=h\tan\theta;$

(5) $s=h\sec\theta.$



【解】由「正切函數」的定義得到

$$\tan\theta=\frac{h}{s}$$

由此式子推得如下的等式

$$\begin{aligned} s&=h\cot\theta\\ &=h\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &=h\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta}\\ &=h\frac{\cos\theta}{\cos(90^\circ-\theta)}. \end{aligned}$$

因此答案為 (1), (2), (3)。這是一則夾帶「情境」的基本概念檢測題。

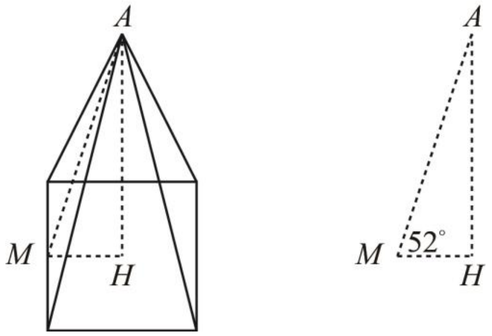
例題 2　古埃及《萊因德紙草書》共有 84 個問題，其中第 56 題至 60 題是探討有關金字塔（底為正方形，四個側面為全等等腰三角形的四角錐）的問題。在書中定義金字塔的「塞克特」為

$$\text{金字塔的塞克特}=\frac{\text{金字塔正方形底之邊長一半}}{\text{金字塔的高度}}.$$

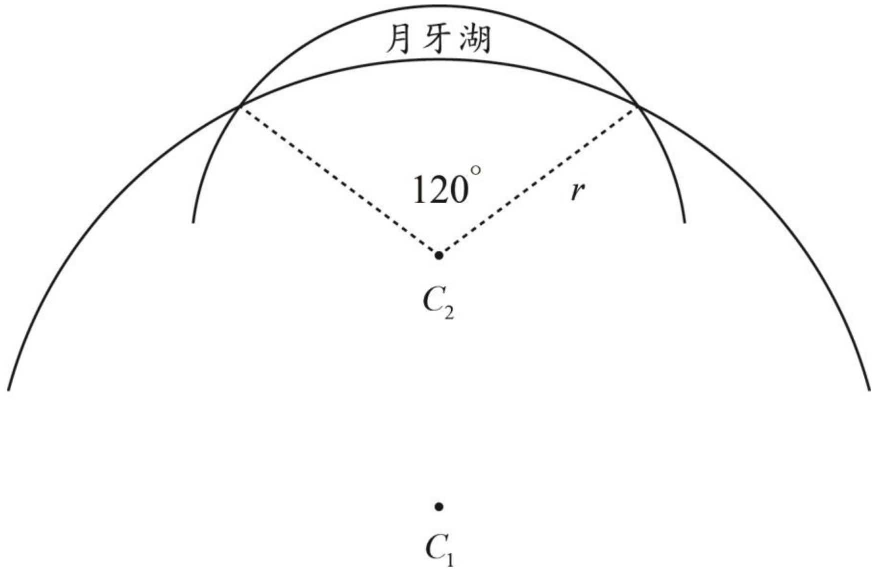
已知古夫金字塔的每個側面與底的夾角約為52°，那麼古夫金字塔的「塞克特」為何？

【解】如右圖，A是金字塔頂點，H是金字塔正方形底的中心，M是金字塔正方形底邊上的一個中點。因為「AH是金字塔的高度」、「MH是金字塔正方形底之邊長一半」，所以由右邊直角三角形示意圖得到

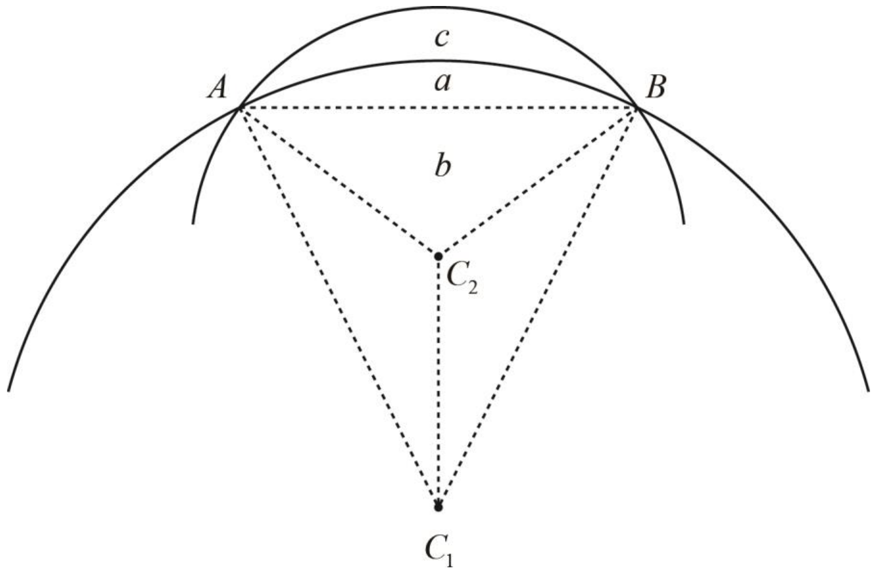
$$\text{古夫金字塔的塞克特}=\frac{MH}{AH}=\cot 52^{\circ}.$$



例題 3　下圖是沙漠中出現的『月牙湖[2]』，月牙湖的上沿是以C_2為圓心，r為半徑的圓之一弧（該弧的圓心角為120°）；月牙湖的下沿是以C_1為圓心的某圓之一弧。已知點C_1在以C_2為圓心，r為半徑的圓周上，試求『月牙湖』的面積（以r表示）。



【解】考慮如下的圖形，令a,b,c代表所在區域的面積（如b是等腰三角形AC_2B的面積，c是月牙湖的面積，a指介於等腰三角形AC_2B與月牙湖之間的弓形面積）。



因為$\angle AC_2B=120^\circ$，所以$\angle AC_1B=60^\circ$（圓周角是圓心角的一半）。因此AC_1B是正三角形，又因為$C_2C_1=C_2B=r,\angle C_1C_2B=120^\circ$，所以$C_1B=2\times r\sin 60^\circ=\sqrt{3}r$。因此

$$3b=\text{正三角形}ABC_1\text{的面積}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2\Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

又$\angle AC_1B=60^\circ$，所以扇形C_1AB的面積為

$$3b+a=\frac{\pi\cdot C_1B^2}{6}=\frac{\pi r^2}{2}.$$

在由$\angle AC_2B=120^\circ$得到扇形C_2AB的面積為

$$a+b+c=\frac{\pi r^2}{3}.$$

因此月牙湖的面積

$$c=(a+b+c)-(3b+a)+2b=\frac{\pi r^2}{3}-\frac{\pi r^2}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)r^2.$$

[2] 月牙形的幾何圖形很常見，如月球、鐮刀、餃子、求神問卜的卜卦、包青天額頭上的印記、大陸鳴沙山的月牙泉（號稱天下沙漠第一泉，敦煌八景之一）也呈月牙形狀。古希臘數學家希波克拉底是月牙形面積的權威，可參考例題 13 的月牙形定理。

地球近似於球體，無論如何剪裁，總是不能將它攤成平面（如橘子皮無法攤平在地上一

樣）。所以將地球的表面繪製成「保持距離」及「方向不變」的平面地圖，幾乎是不可能的事。既然『魚』與『熊掌』不能兼得，只好力求一項完整，捨棄另一項了。對一位航海員來說，方向的正確無誤是比較重要的，所以麥卡特在 1569 年所繪製航海地圖就是成全了方向，而捨棄了距離[3]。麥卡特的航海地圖的緯線是繪成水平線，經線是垂直的線，這樣的任兩條經線在地圖上的距離是一樣的（但是，地球上的任兩條經線越接近北極時，距離越近）。因此，麥卡特的航海地圖是無法保持距離的，但是在麥卡特的匠具用心之下，他的地圖是會維持方向不變的。這都歸功於他所創造的修正函數 $f(\theta)$：

[3] 所謂的航海地圖就是指符合「(1)從地圖上任何一點出發，正北路線的方向都繪成正上方。(2)在地圖上，所有的羅盤方向與北方的關係都正確無誤。」這兩項特點的地圖。麥卡特是史上第一位製作出這種地圖的人。

例題 4　麥卡特為了製作航海地圖，使用過函數

$$f(\theta)=\log_{10}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta},\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

試著導出

(1)　$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$　。

(2)　$f(-\theta)=-f(\theta)$　。

【解】關於(1)，由

$$\begin{aligned}2f(\theta)&=2\log_{10}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\log_{10}\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\\&=\log_{10}\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}\\&=\log_{10}\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\end{aligned}$$

得到。

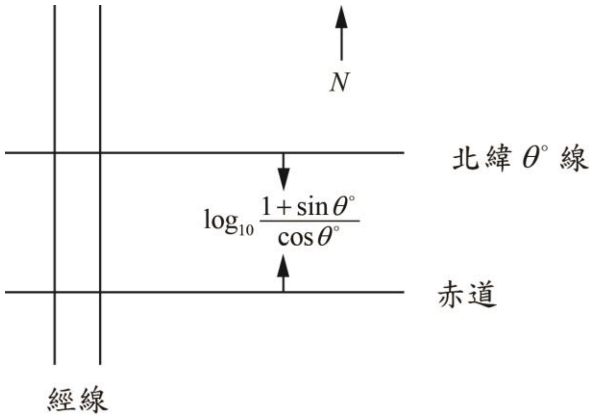
關於(2)，利用(1)得到

$$
\begin{aligned}
f(-\theta) &= \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1+\sin(-\theta)}{1-\sin(-\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \\
&= -\frac{1}{2}\log_{10}\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \\
&= -f(\theta).
\end{aligned}
$$

例題 5　麥卡特的航海地圖，是將地球表面攤平在紙上，將經、緯線繪成互相垂直的兩組直線（水平線為緯線，與水平線垂直的是經線）。麥卡特為了讓航海地圖使用方便，將赤道與北緯 θ° $(0<\theta<90)$ 的兩條緯線在航海地圖上繪成相距

$$\log_{10}\frac{1+\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$$

公尺的兩條平行線。



(1) 北緯 30° 線與北緯 60° 線在麥卡特的航海地圖上相距幾公尺。

(2) 若麥卡特航海地圖的赤道線北邊 $\log_{10}3$ 公尺處是北緯 θ°，則求 $\sin\theta^\circ$ 的值。

【解】關於(1)：北緯 30° 線與北緯 60° 線在麥卡特的航海地圖上的距離，等於赤道與北緯 60° 線的距離減去赤道與北緯 30° 線的距離：

$$\log_{10}\frac{1+\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}-\log_{10}\frac{1+\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\log_{10}\frac{(1+\sin 60^\circ)\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ(1+\sin 30^\circ)}$$

$$=\log_{10}\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\log_{10}\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

關於(2)：由題意知道

$$\log_{10}\frac{1+\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}=\log_{10}3\Rightarrow 1+\sin\theta^\circ=3\cos\theta^\circ$$

$$\Rightarrow (1+\sin\theta^\circ)^2=9\cos^2\theta^\circ=9-9\sin^2\theta^\circ$$

$$\Rightarrow 5\sin^2\theta^\circ+\sin\theta^\circ-4=0$$

$$\Rightarrow \sin\theta^\circ=\frac{4}{5},-1\ (\text{不合})。$$

10.2 三角法（改良的綜合法）……正、餘弦定理的使用與三角測量問題

定理 10.1(平行四邊形定理) 若 $ABCD$ 是一個平行四邊形，則證明

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

【證明】對三角形 ABC 的角 $\angle ABC$ 進行餘弦定理得到

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\angle ABC.$$

同理，對三角形 BCD 的角 $\angle BCD$ 進行餘弦定理得到

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD\cos\angle BCD.$$

將兩等式相加，利用 $\angle ABC+\angle BCD=180^\circ, BC=DA, CD=AB$ ，得到

$$\begin{aligned}
&AC^2+BD^2\\
&\quad=\left(AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\angle ABC\right)\\
&\quad\quad+\left(DA^2+CD^2-2BC\times AB\cos\left(180^\circ-\angle ABC\right)\right)\\
&\quad=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+2AB\times BC\left(-\cos\angle ABC+\cos\angle ABC\right)\\
&\quad=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.
\end{aligned}$$

例題 6　三邊邊長都是正整數，而有一內角為30°的三角形是否存在。

【解】假設三角形 ABC 滿足 $AB=c, BC=a, CA=b, \angle BAC=30^\circ$ 且 a,b,c 都是正整數。

由餘弦定理得

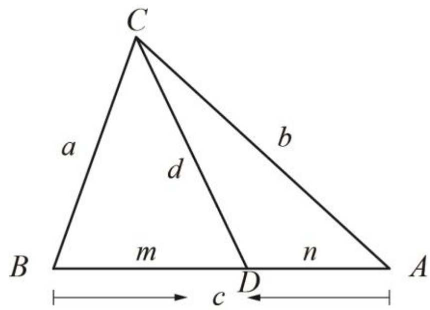
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC \Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos 30^\circ$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}.$$

最後等式的左邊「$\sqrt{3}$是一個無理數」；而右邊「分數$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$是有理數」，顯然不會相等。因此假設有問題，即這樣的三角形不可能存在。

在 1745 年，斯圖爾特發表如下的定理：

定理 10.2(斯圖爾特定理)　如右圖，三角形 ABC 中，D 是 AB 上的一點，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，$CD=d$，$AD=n$ 及 $BD=m$。證明

$$a^2n+b^2m=c\left(mn+d^2\right).$$



【證明】在餘弦定理的使用之下，本問題變得異常容易：對三角形 BDC 的角 $\angle BDC$ 做餘弦定理得到

$$a^2=m^2+d^2-2md\cos\angle BDC \qquad (10.1)$$

再對三角形 ADC 的角 $\angle ADC$ 做餘弦定理得到

$$b^2=n^2+d^2-2nd\cos\angle ADC=n^2+d^2+2nd\cos\angle BDC \qquad (10.2)$$

將式子$(10.1)\times n+(10.2)\times m$ 整理得到

$$\begin{aligned}a^2n+b^2m&=m^2n+mn^2+md^2+nd^2\\&=(m+n)mn+(m+n)d^2\\&=c\left(mn+d^2\right).\end{aligned}$$

例題 7　三角形 ABC 中，$\angle BAC = 120^\circ, AB = x, AC = y$ 。設 D 在 BC 上，且 AD 是 $\angle BAC$ 的分角線。如果 $AD = z$，那麼

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$$

【證明】由

$$\begin{aligned}
&\text{三角形 } BAD \text{ 的面積} = \frac{AB \times AD \sin\angle BAD}{2} = \frac{xz\sin 60^\circ}{2} = \frac{xz\sqrt{3}}{4};\\
&\text{三角形 } CAD \text{ 的面積} = \frac{AC \times AD \sin\angle CAD}{2} = \frac{yz\sin 60^\circ}{2} = \frac{yz\sqrt{3}}{4};\\
&\text{三角形 } BAC \text{ 的面積} = \frac{AB \times AC \sin\angle BAC}{2} = \frac{xy\sin 120^\circ}{2} = \frac{xy\sqrt{3}}{4};\\
&\text{三角形 } BAC \text{ 的面積} = \text{三角形 } BAD \text{ 的面積} + \text{三角形 } CAD \text{ 的面積}
\end{aligned}$$

得到

$$\frac{xy\sqrt{3}}{4} = \frac{xz\sqrt{3}}{4} + \frac{yz\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$$

定理 10.3(<u>海龍</u>公式) 三角形的三邊長為 a,b,c，令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$。證明三角形的面積為

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

【證明】三角形的面積為

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}.$$

由餘弦定理知道

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

代入面積公式得到

$$
\begin{aligned}
\text{三角形面積} &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned}
$$

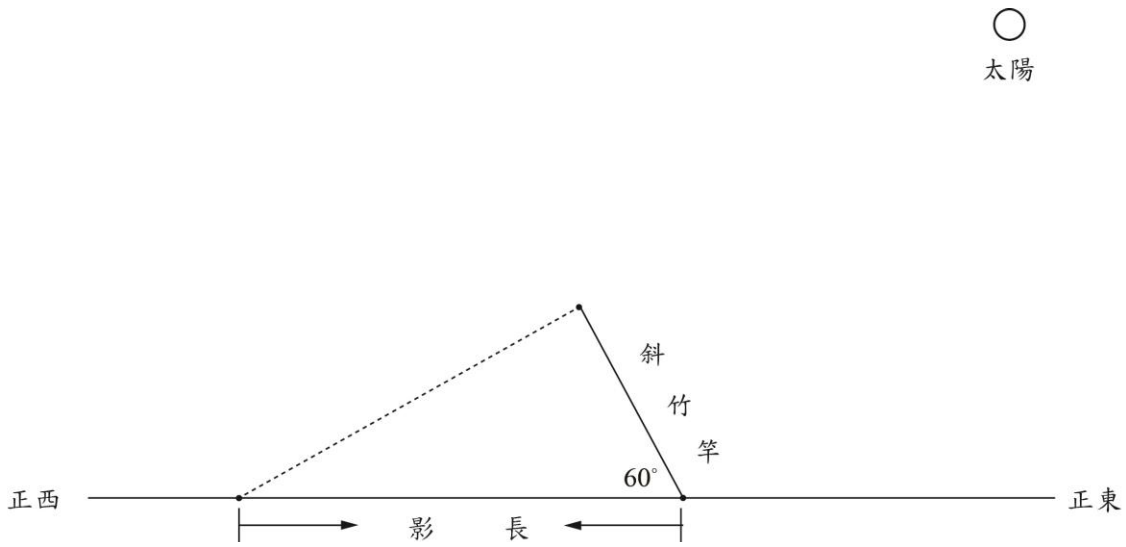
就如同「曹沖在船上，幫他的父親曹操想出量大象體重的妙法[4]」、「阿基米得在浴室裡，想到解決國王的皇冠是否為純金打造的巧思[5]」、「高斯在教室裡，速算$1+2+3+\cdots+100$的靈感[6]」一樣，希臘哲學家及數學家泰勒斯也有一則幫埃及法老王丈量金字塔高度的傳說。讓我們來欣賞他的智慧吧！

[4] 曹操的大象是東吳孫權送給他的，曹沖利用大象在船上下沈的刻度，將大象體重換算成一大堆小石頭的重量。透過曹沖的卓見，使量大象體重的問題變成簡易的加法問題。

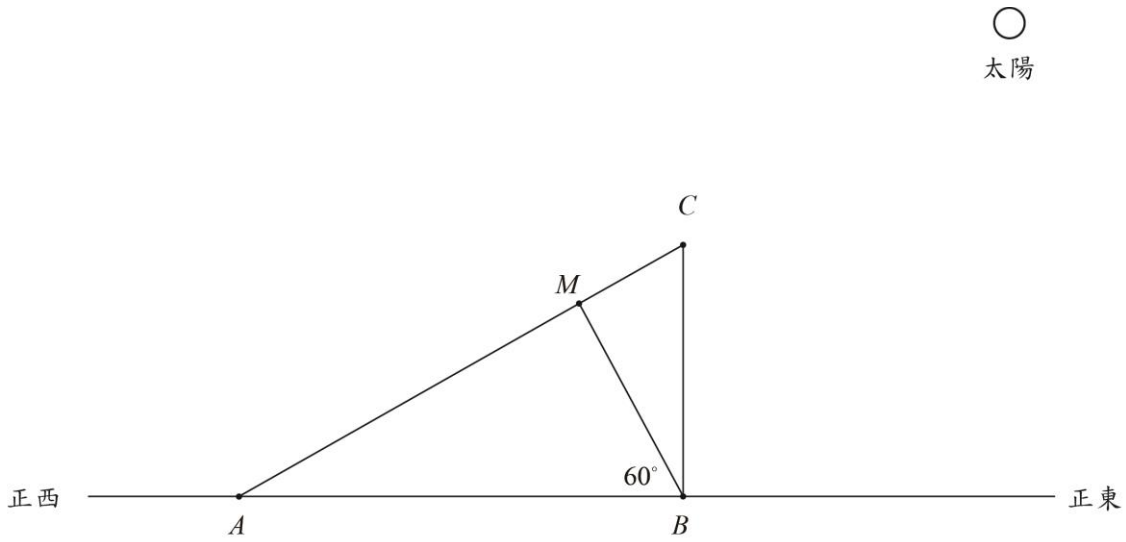
[5] 阿基米得將皇冠放到盛滿水的容器裡，溢出水的體積就是皇冠的體積，這樣就可以知道皇冠的密度與純金的密度是否一樣。

[6] 高斯將$1+2+3+\cdots+100$與倒過來的式子$100+99+\cdots+1$逐項相加得到$(1+100)+(2+99)+\cdots+(100+1)=101\times100=10100$，因此推得$\underline{1+2+3+\cdots+100=10100}\over 2$ $=5050$。

例題 8　早上，太陽從正東方的地平線冉冉升起，泰勒斯忙著測量一根向正西邊傾斜的竹竿及其影子的長度（如下圖所示）。泰勒斯量得竹竿長 2 公尺，它的影子長度是 4 公尺。就在此刻，丈量工人向泰勒斯回報說：「金字塔的影子長度剛好是 100 公尺。」請問：該金字塔的真正高度是幾公尺？



【解】作直線BC與直線AB（地面）垂直，且直線AM與直線BC相交於C點（如圖所示）。



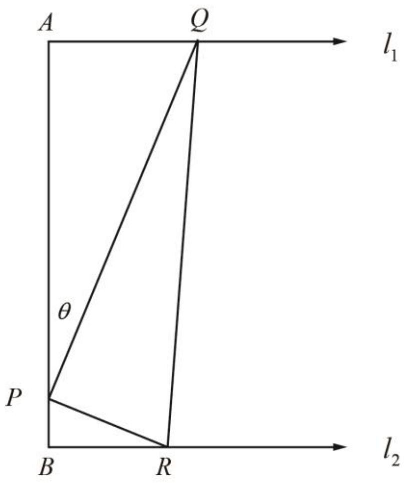
在三角形ABM中，$AB=4, BM=2, \angle ABM=60^{\circ}$，由餘弦定理得到

$$AM^{2}=4^{2}+2^{2}-2\cdot 4\cdot 2\cos 60^{\circ} \Rightarrow AM=2\sqrt{3}.$$

由$AB^{2}=AM^{2}+BM^{2}$知道三角形ABM是直角三角形，且$\angle AMB=90^{\circ}$。又由$\angle ABM=60^{\circ}$得到$\angle CAB=30^{\circ}$。因為$AB=4, \angle CAB=30^{\circ}, \angle CBA=90^{\circ}$，所以$BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$。因為金字塔的高度與影子長度的比例與$\dfrac{BC}{BA}$一樣，所以

$$\frac{金字塔的高度}{100}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4}\Rightarrow \text{金字塔的高度}=\frac{100\sqrt{3}}{3}\ (公尺)。$$

10.3 三角函數的性質



例題 9　如右圖所示，射線l_1與l_2平行，AB分別與射線l_1,l_2垂直，P,Q,R分別是線段AB，射線l_1,l_2上的點，而且滿足$\angle QPR=90^\circ$。

(1) 若$PA=a,PB=b$，則求直角三角形PQR的面積（以$a,b,\theta=\angle APQ$符號表示）。

(2) 承(1)，當$\angle APQ$為幾度時，直角三角形PQR的面積會最小，又是多少。

【解】關於(1)：由$\angle PRB=\theta$及銳角三角函數的定義知道

$$\frac{a}{PQ}=\cos\theta,\frac{b}{PR}=\sin\theta.$$

因此直角三角形PQR的面積為

$$\frac{PQ\times PR}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)=\frac{ab}{\sin 2\theta}.$$

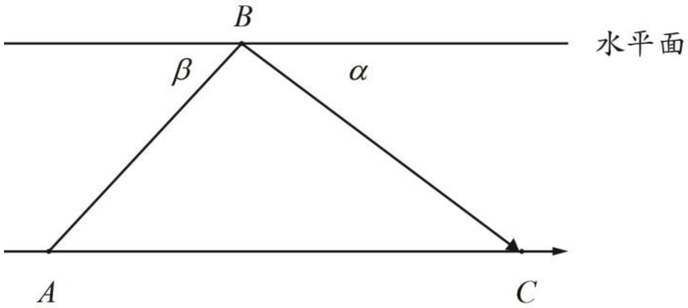
關於(2)：因為$PA=a,PB=b$是固定的，所以考慮$\sin 2\theta$的變化即可。由$0<\theta<\frac{\pi}{2}$知道$0<2\theta<\pi$，即$0<\sin 2\theta\le 1$。因此，當$\theta=45^\circ$時（此時$\sin 2\theta=1$），直角三角形PQR的面積為ab（最小）。

例題 10　甲、乙兩隻同種的魚相遇於A點，甲魚由A點水平向前游動（這是魚最省體力的前進方式），乙魚選擇走AB的路線浮上水平面，呼吸一口新鮮的空氣之後，再選擇走BC的路徑與水平游動的甲魚相遇於C點。根據經驗，浮上水平面再游至C點的乙魚所

消耗的能量會是選擇水平游到C點的甲魚所消耗能量的

$$\frac{\sin\alpha + k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

倍，這裡的常數k僅跟魚種有關。



如果甲、乙兩隻魚是$k=\sqrt{5}$的魚種，試問當乙魚選擇$\sin\beta=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $(0^\circ<\alpha,\beta<90^\circ)$

時，乙魚消耗的能量會是甲魚的幾倍？

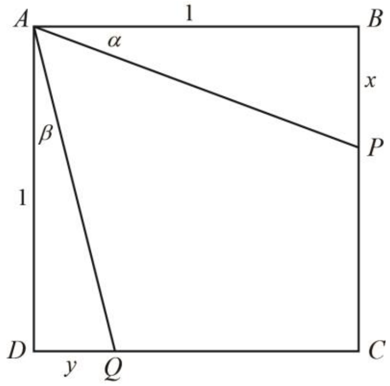
【解】將$\sin\beta=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$代入能量公式得到

$$\begin{aligned}\frac{\text{乙魚消耗的能量}}{\text{甲魚消耗的能量}} &= \frac{\sin\alpha+\sqrt{5}\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{5}}\\ &= 2\,(\text{倍})。\end{aligned}$$

例題 11　設$ABCD$是邊長為 1 的正方形，P點在BC上，Q點在CD上，且$\angle PAQ=45^\circ$。推論

$$\frac{AB+BP}{AD+DQ}=\frac{AP^2}{AQ^2}.$$

【解】設$\angle BAP=\alpha,\angle DAQ=\beta,BP=x,DQ=y$（如右圖所示）。因為$\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y,\alpha+\beta=45^\circ$，所以



$$
\begin{aligned}
1=\tan 45^{\circ}=\tan(\alpha+\beta)\\
&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\
&=\frac{x+y}{1-xy}\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}.
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{aligned}
\frac{AB+BP}{AD+DQ}&=\frac{1+x}{1+y}\\
&=\frac{1+\dfrac{1-y}{1+y}}{1+y}\\
&=\frac{2}{(1+y)^2};
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{AP^2}{AQ^2}&=\frac{1^2+x^2}{1^2+y^2}\\
&=\frac{1^2+\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2}{1^2+y^2}\\
&=\frac{(1+y)^2+(1-y)^2}{(1+y)^2\left(1+y^2\right)}\\
&=\frac{2}{(1+y)^2}
\end{aligned}
$$

得到

$$
\frac{AB+BP}{AD+DQ}=\frac{AP^2}{AQ^2}.
$$

10.4 歐基里德之窗（綜合法）……直角、共圓與相似三角形的使用

『畢氏定理』有如平面幾何學裡的聖經，是大家必讀且熟記的一個定理。歐基里德名著《幾何原本》前兩卷的部分內容就是在探討「直角三角形」的各種性質及邊長的計算等問題。

《原本》的第三、四卷是在探索圓內接四邊形及圓內接多邊形（多點共圓）的性質。就以四點共圓為例，由「等弦（弧）對等圓周（心）角」的性質可以作角度的轉換，再加上『托勒密定理』與『三弦定理』，我們就掌握住了多點共圓問題的兩把利刃。特別是這兩個定理，不僅在圓上展現實力，在許多與圓不相關的問題上，也可以看到他們的鋒芒。例如『畢氏定理』可以直接由這兩個定裡推出（參閱習題部分）。

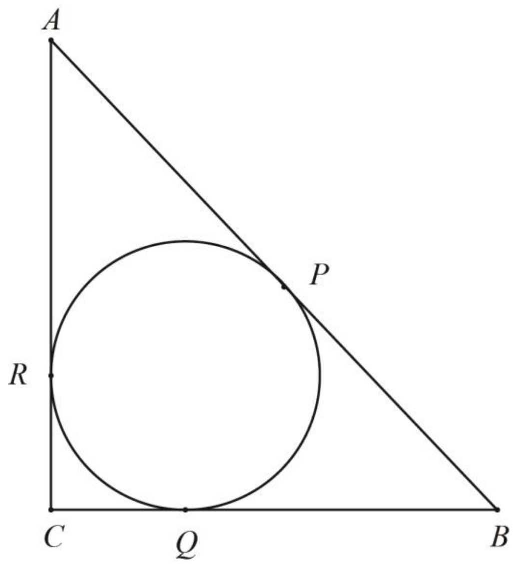
《原本》的第五、六卷則是在探索三角形的相似性質，有了相似三角形，就有了相等的

對應角及相等的邊長比例關係。

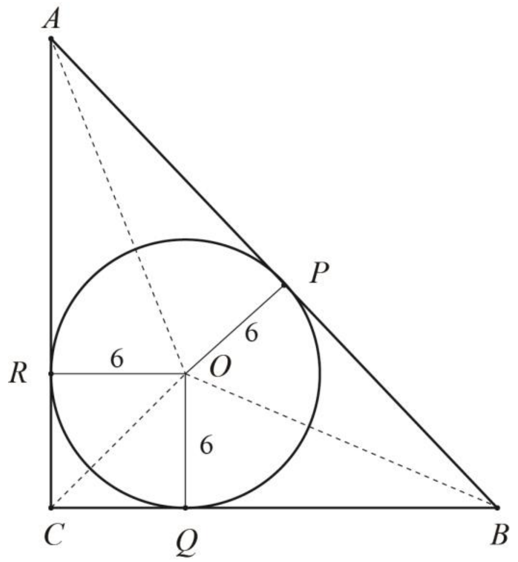
10.4.1 幾何聖經……畢氏定理

在學會『正弦定理』、『餘弦定理』之前，尋找「直角三角形」可以說是解決平面幾何的計算問題之重要方法，原因在於可以使用『畢氏定理』。畢氏定理的重要性，可以從科學家與數學家說過的話來印證：德國天文學家克卜勒說：「幾何學裡有兩件寶，一是畢氏定理，另一個是黃金分割」；擅長計算行星軌道的數學家高斯曾提出：「假如把畢氏定理的圖形畫在撒哈拉沙漠上，說不定火星人等用他們的望遠鏡就可以看得到」。

例題 12　直角三角形 ABC 中，內切圓的半徑為 6，P,Q,R 是圓與三邊的切點。如果三角形 ABC 的面積與其周長的和是 280，試求三角形 ABC 的三邊邊長。



【解】設圓心為 $O, BP = BQ = a, AP = AR = b$，並添如下圖的補助線。



因此

$$\begin{aligned}\text{三角形 } ABC \text{ 的邊長} &= AB+BC+CA\\ &=(b+a)+(a+6)+(6+b)\\ &=2(a+b+6);\\ \text{三角形 } ABC \text{ 的面積} &= \Delta AOB+\Delta BOC+\Delta COA\\ &=\frac{6(a+b)}{2}+\frac{6(a+6)}{2}+\frac{6(6+b)}{2}\\ &=6(a+b+6).\end{aligned}$$

由三角形 ABC 的面積與其周長的和是 280 得到

$$280=2(a+b+6)+6(a+b+6)\Rightarrow a+b=29.$$

針對直角三角形 ABC，利用畢氏定理得到

$$(a+b)^2=(a+6)^2+(b+6)^2\Rightarrow ab=6(a+b)+36=6\times 29+36=210.$$

綜合 $a+b=29, ab=210$ 得到 a 與 b 是二次方程式

$$x^2-29x+210=0$$

的兩根。因為

$$x^2-29x+210=(x-14)(x-15),$$

所以

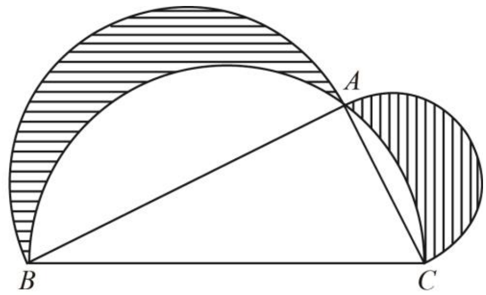
$$\{a,b\}=\{14,15\}.$$

因此三角形 ABC 的三邊邊長為

$$20=14+6, 21=15+6, 29=14+15.$$

希波克拉底（西元前五世紀的古希臘數學家）以研究鐮刀形或月牙形的面積而聞名，底下的例子就是當時他研究過的圖形：

例題 13 (月牙形定理) 在右圖中，以 BC，AC 及 AB 為直徑的三個半圓圍出兩個月牙形區域（水平直線區域與垂直直線區域）。證明：兩個月牙形區域的面積和等於直角三角形 ABC 的面積。



【解】設水平直線的月牙形區域面積為 X，而介於此月牙形區域與直角三角形 ABC 之間的（弓形 AB）區域面積為 x；同理，令垂直直線的月牙形區域面積為 Y，而介於此月牙形區域與直角三角形 ABC 之間的（弓形 AC）區域面積為 y。由半圓面積得到

$$\begin{cases} x+y+\text{直角三角形 } ABC \text{ 的面積}=\text{以 } BC \text{ 為直徑的半圓面積}=\dfrac{\pi BC^2}{2}; \\ X+x=\text{以 } AB \text{ 為直徑的半圓面積}=\dfrac{\pi AB^2}{2}; \\ Y+y=\text{以 } AC \text{ 為直徑的半圓面積}=\dfrac{\pi AC^2}{2}. \end{cases}$$

因為三角形 ABC 為直角三角形，所以

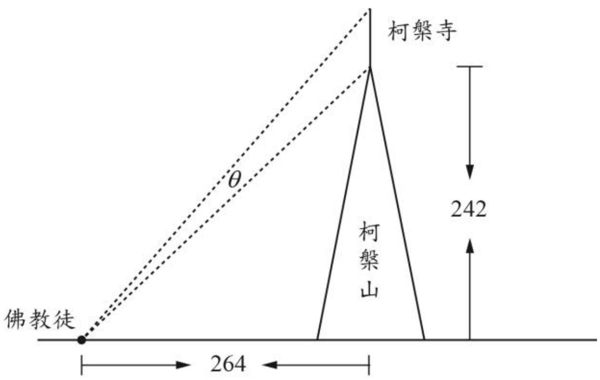
$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

綜合這些等式得到

$$x+y+\text{直角三角形 } ABC \text{ 的面積}=(X+x)+(Y+y)$$
$$\Rightarrow \text{直角三角形 } ABC \text{ 的面積}=X+Y.$$

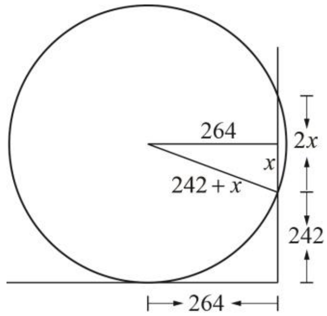
所以兩個月牙形區域的面積和等於直角三角形 ABC 的面積。

例題 14 古代尼泊爾的柯槃山上建有一座柯槃寺。虔誠的佛教徒採取五體投地式的方式朝聖，向柯槃寺前進。有經驗的佛教徒都會在離柯槃山前 264 公尺處，抬頭仰望柯槃寺，並許下願望，因為此時看見的柯槃寺最大（即柯槃寺所張的視角 θ 最大）。



現在知道柯槃山的高度為 242 公尺。試問：昔日的柯槃寺高度是多少。

【解】設柯槃寺的高度為$2x$公尺。由下圖觀察得知：當過佛教徒的眼睛、柯槃寺底部、柯槃寺頂點三點的圓與地面的水平線相切時，視角會最大（若不相切，則此圓的半徑會比相切圓的半徑大，所以柯槃寺的視角比較小）。



由上圖的直角三角形得到

$$(x+242)^2 = x^2 + 264^2 \Rightarrow x = 23.$$

因此柯槃寺的高度為 46 公尺。

【另解】由圓冪性質得到

$$264^2 = 242 \times (242 + 2x) \Rightarrow x = 23$$

亦可得到柯槃寺的高度為 46 公尺。

10.4.2 圓上利刃……托勒密定理與三弦定理

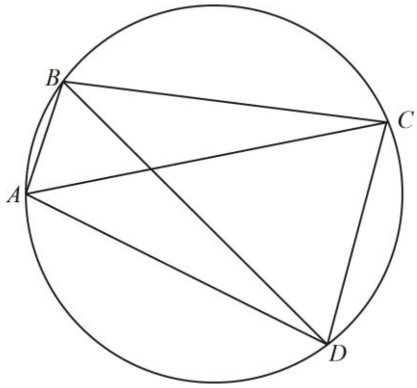
如前言所說，尋找「直角三角形」、「多點共圓」（四點以上）或「相似三角形」是利用「綜合法」處理平面幾何問題的三大手法。「直角三角形」有畢氏定理當靠山，可以輕易計算邊長的關係，「相似三角形」也有邊長的比例式可以使用，但「多點共圓」卻僅

能作角度的轉移，邊長的計算有點使不上力[7]。古希臘天文學家、數學家托勒密發現的『托勒密定理』剛好可以派得上用場，補足這道缺口。

[7] 國中時，學過的「圓冪性質」只能算是相似三角形比例式的一個應用，不能視為多點共圓的計算利器。

定理 10.4.2(托勒密定理) 如下圖，凸四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形。證明：

$$AC\times BD=AD\times BC+AB\times CD.$$



【證明】設圓的半徑為 R。利用正弦定理將邊長關係化成三角函數的角度關係：

$$\begin{aligned}
AC\times BD&=4R^2\sin\angle ABC\sin\angle BCD\\
&=2R^2\left[\cos(\angle DBC-\angle ACB)-\cos(\angle ACB+2\angle ABD+\angle CAD)\right]\\
&=2R^2\left[\cos(\angle DBC-\angle ACB)-\cos(\pi-\angle BAC+\angle ABD)\right]\\
&=2R^2\left[\cos(\angle DBC-\angle ACB)+\cos(\angle BAC-\angle ABD)\right];
\end{aligned}$$

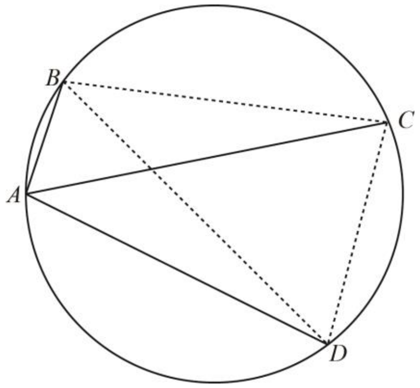
$$\begin{aligned}
AD\times BC+AB\times CD&=4R^2(\sin\angle ACD\sin\angle BDC+\sin\angle ACB\sin\angle DBC)\\
&=2R^2\big[\cos(\angle DBC-\angle ACB)-\cos(\angle DBC+\angle ACB)\\
&\qquad+\cos(\angle BDC-\angle ACD)-\cos(\angle BDC+\angle ACD)\big]\\
&=2R^2\left[\cos(\angle DBC-\angle ACB)+\cos(\angle BAC-\angle ABD)\right].
\end{aligned}$$

上述是利用「三角法」證明『托勒密定理』的方式。『托勒密定理』是很早的定理，古希臘時期是採取巧添補助線的「綜合法」來證明的。

托勒密定理只是敘述「四點共圓」的邊長之間的關係，還沒有將角度也扯進來，所以它只能算是「綜合法」的一項利器。如果要像「正、餘弦定理」這種「三角法」那麼有威力，還需發展更有效的「四點共圓」的定理。在 1985 年，中國遼寧省侯明輝老師發現的『三弦定理』剛好可以扮演這樣的角色。

定理 10.5(三弦定理) 如下圖，A,B,C,D是圓上四點。證明：

$$AC\sin\angle BAD = AD\sin\angle CAB + AB\sin\angle CAD.$$



【證明】設圓的半徑為R。由正弦定理得到

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}=2R.$$

將上述代入托勒密定理得到

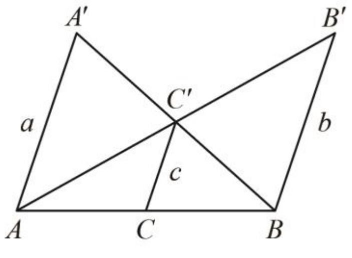
$$2R\times AC\times\sin\angle BAD = 2R\left(AD\times\sin\angle CAB + AB\times\angle CAD\right).$$

兩邊消去$2R$就得到三弦定理。

10.4.3 三角形剋星……相似三角形

處理任意三角形的問題，最佳的方式為尋找與它相似的三角形。有了兩個相似的三角形之後，就可以做角度的轉換與邊長的比例計算。

例題 15 下圖中AA',BB',CC'是互相平行的三線段，且令$AA'=a,BB'=b,CC'=c$。



(1) 證明

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

(2) 若 $AA'=42, BB'=399$，求 $CC'=$？

【證明】設 $AC=x, BC=y$：

(1) 由三角形 ACC' 與三角形 ABB' 相似得到

$$\frac{x}{x+y}=\frac{c}{b};$$

由三角形 BCC' 與三角形 BAA' 相似得到

$$\frac{y}{x+y}=\frac{c}{a}.$$

將兩式相加得到

$$\frac{c}{b}+\frac{c}{a}=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1 \Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

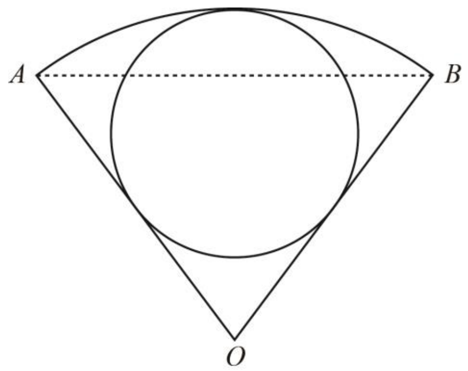
(2) 將 $a=42, b=399$ 代入(1)得到

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{42}+\frac{1}{399}=\frac{1}{38}.$$

因此 $CC'=38$ 。

例題 16 右圖是一個小圓內切於圓弧形內。如果圓弧的半徑 $OA=R$，內切圓半徑 r，線段 $AB=2a$，證明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}.$$

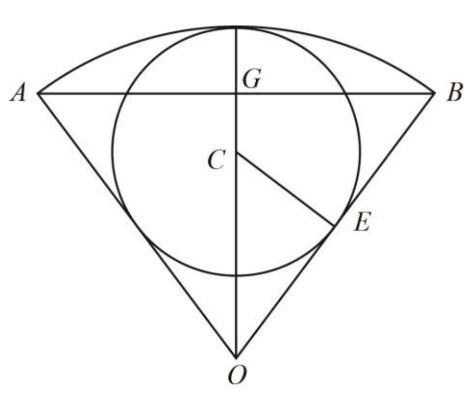


【證明】考慮如右的補助線，它們形成兩個相似的直角三角形 OGB 與 OEC。利用比例式

$$\frac{OB}{BG}=\frac{OC}{CE}$$

得到

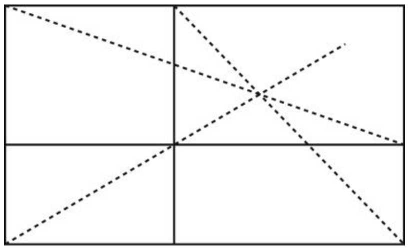
$$\frac{R}{a}=\frac{R-r}{r} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}.$$



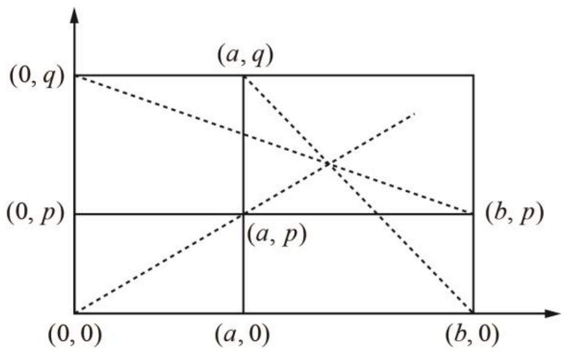
10.5 笛卡爾之夢（代數法）……座標法、複數的使用與向量法

10.5.1 座標與幾何

例題 17　如下圖，大矩形被任意水平與垂直線分割成四個小矩形。證明：圖中的三條虛線交於一點。



【證明】將大矩形放置在坐標平面上（如下圖所示）。



通過$(b,0)$與(a,q)的直線方程式為$qx-(a-b)y=bq$；而通過$(0,q)$與(b,p)的直線方程式為$(p-q)x-by=-bq$。兩方程式的解（即兩直線的交點）為

$$(x,y)=\left(\frac{abq}{aq+bp-ap},\frac{bpq}{aq+bp-ap}\right).$$

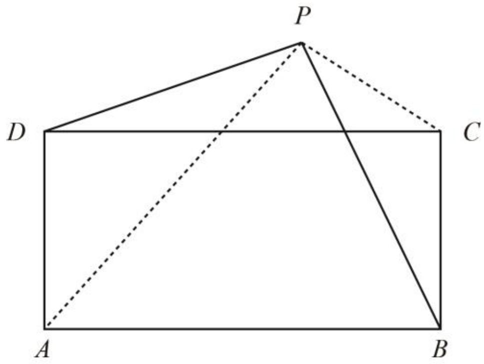
因為

$$\frac{y}{x}=\frac{\dfrac{bpq}{aq+bp-ap}}{\dfrac{abq}{aq+bp-ap}}=\frac{p}{a},$$

所以此點在通過 $(0,0)$與(a,p)兩點的連線上。

例題 18　考慮如下的矩形問題：

(1)　$ABCD$是一個矩形，P是平面上的任意點。



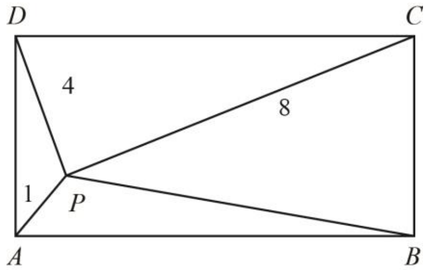
證明

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

(2) 承(1)，證明

$$\frac{\cos\angle BPD}{\cos\angle APC}=\frac{PA\cdot PC}{PB\cdot PD}.$$

(3) 如下圖，求PB的值。



【解】關於(1)：利用座標法，令

$$A=(0,0),B=(a,0),D=(0,b),C=(a,b).$$

若$P=(x,y)$，則

$$\begin{aligned}PA^2+PC^2&=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}^2+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}^2\\&=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2;\\PB^2+PD^2&=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}^2+\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}^2\\&=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2.\end{aligned}$$

因此

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

關於(2)：由三角形APC的餘弦定理得到

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA\cdot PC\cos\angle APC$$
$$\Rightarrow PA^2 + PC^2 - AC^2 = 2PA\cdot PC\cos\angle APC;$$

同理，由三角形 BPD 的餘弦定理得到

$$BD^2 = PB^2 + PD^2 - 2PB\cdot PD\cos\angle BPD$$
$$\Rightarrow PB^2 + PD^2 - BD^2 = 2PB\cdot PD\cos\angle BPD.$$

由(1)及 $AC = BD$（矩形對角線相等）得到

$$PA\cdot PC\cos\angle APC = PB\cdot PD\cos\angle BPD \Rightarrow \frac{\cos\angle BPD}{\cos\angle APC} = \frac{PA\cdot PC}{PB\cdot PD}.$$

關於(3)：由(1)得到

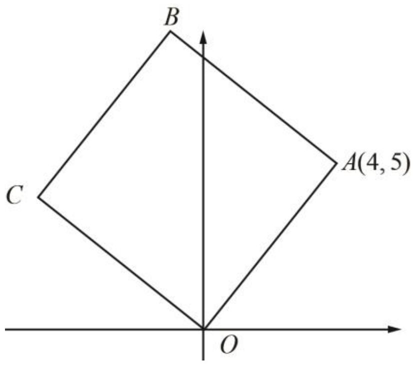
$$1^2 + 8^2 = PB^2 + 4^2 \Rightarrow PB = 7.$$

10.5.2 複數與幾何……旋轉的運用

例題 19　如右圖，$OABC$ 是正方形，且 $A = (4,5)$。

(1) 求 B 點的座標。

(2) 求 C 點的座標。



【解】將座標平面換成複數平面，A 點的複數座標為 $4+5i$：

(1) 設 B 點的複數座標為 $x+yi$。因為 $\angle BOA = 45^\circ, \dfrac{BO}{AO} = \sqrt{2}$，所以

$$\frac{B\text{ 點的複數座標}}{A\text{ 點的複數座標}} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$
$$\Rightarrow \frac{x+yi}{4+5i} = 1+i$$
$$\Rightarrow x+yi = (4+5i)(1+i) = -1+9i.$$

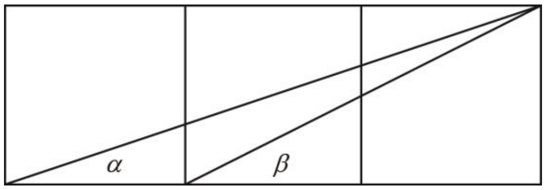
因此 B 點的座標為 $(-1,9)$。

(2) 設 C 點的複數座標為 $x+yi$。因為 $\angle COA = 90^\circ, \dfrac{CO}{AO} = 1$，所以

$$\frac{C\text{ 點的複數座標}}{A\text{ 點的複數座標}}=(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$
$$\Rightarrow \frac{x+yi}{4+5i}=i$$
$$\Rightarrow x+yi=(4+5i)i=-5+4i.$$

因此 C 點的座標為 $(-5,4)$。

例題 20　如下圖，長方形是由三個正方形構成的。求 $\alpha+\beta$ 的值。



【解】如果將小正方形的邊長視為 1，那麼 α 是邊長為 $3,1,\sqrt{10}$ 的直角三角形的一內角（對應的邊長為 1），對應到複數的極式為

$$3+i=\sqrt{10}(\cos\alpha+i\sin\alpha);$$

同理

$$2+i=\sqrt{5}(\cos\beta+i\sin\beta).$$

將兩式相乘得

$$\begin{aligned}(3+i)(2+i)&=5\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=5\sqrt{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right).\end{aligned}$$

因為

$$(3+i)(2+i)=5+5i=5\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ),$$

所以比較得到

$$\alpha+\beta=45^\circ.$$

10.5.3 向量與幾何

向量的利器就是「內積」。當我們碰到「直角」或「垂直」時，想到的第一件事情總是

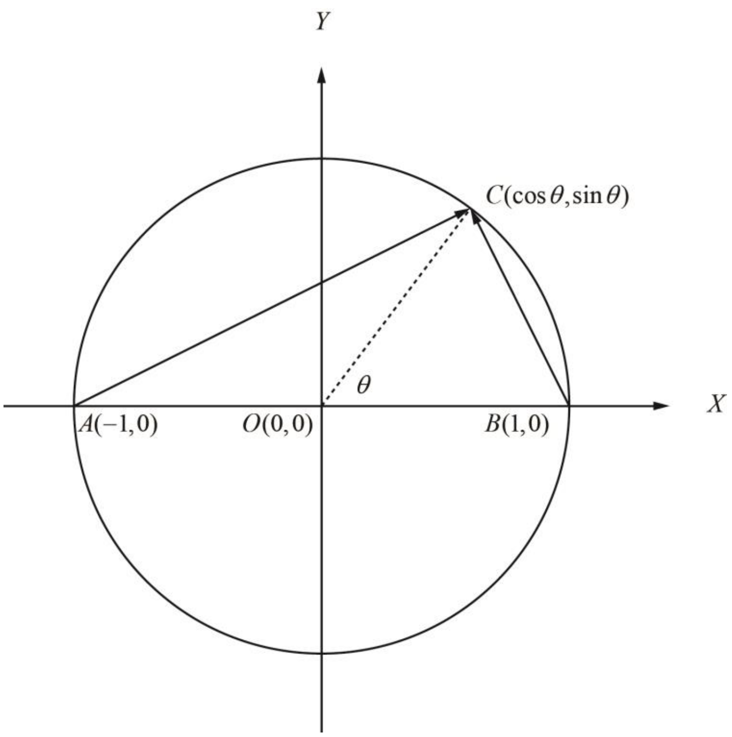
「畢氏定理」，但是，「直角」或「垂直」的另一代言人是「內積為 0」。因此，幾何上處理「垂直」這一概念，除了「畢氏定理」之外，「內積為 0」也是一種慣用的手法。在此就以幾何學上最早被證明的定理「所有對應於直徑的圓周角都是直角」為例，據傳這個定理是古希臘數學家泰勒斯證明出來的（事實上，巴比倫人早在一千年前就知道這個性質）。

定理 10.6 利用向量內積證明「所有對應於直徑的圓周角都是直角。」

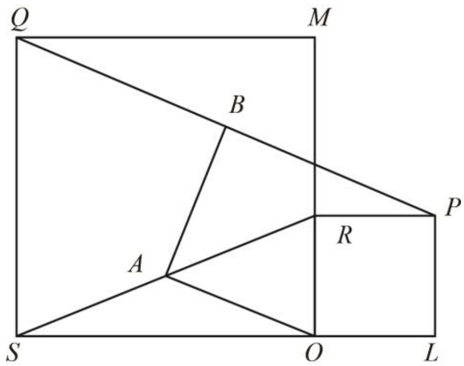
【證明】將單位圓畫在直角座標上，讓圓心與原點重疊。如下圖所示，AB 是直徑，C 是單位圓上的任一點。如果 $\angle BOC=\theta$，那麼根據三角函數的定義，C 點的座標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$。因此，$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta+1,\sin\theta),\overrightarrow{BC}=(\cos\theta-1,\sin\theta)$。這兩向量的內積為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\cos\theta+1)(\cos\theta-1)+\sin\theta\sin\theta\\&=\left(\cos^2\theta-1\right)+\sin^2\theta\\&=1-1\\&=0.\end{aligned}$$

因為 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以向量 $\overrightarrow{AC}$ 與向量 $\overrightarrow{BC}$ 互相垂直，即 $\angle ACB=90^\circ$，證畢。



例題 21　如下圖，$OLPR,OMQS$ 是兩個相鄰的正方形，B 是 PQ 的中點，A 是 RS 的中點。證明：$\angle OAB=90^\circ$。



【證明】採取座標法，令 $O=(0,0),L=(a,0),P=(a,a),R=(0,a),S=(-b,0),M=(0,b),$ $Q=(-b,b)$。這時

$$B=\left(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right),A=\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right).$$

因此

$$\overrightarrow{AO}=\left(\frac{b}{2},-\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right).$$

計算 $\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的內積得到

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=0.$$

因為內積為 0，所以 $\angle OAB=90^\circ$。

習題 1　有一半徑 r，角度為 θ° 的扇形。經測量發現，此扇形的弧長也是 r。

(1) 求 θ 值。

(2) 求此扇形面積（以 r 表示）。

習題 2　印度間諜<u>南心</u>在前往拉薩的途中遇到搶匪，<u>南心</u>落荒而逃轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡的小路正前方偏右 120 度方向昇起。<u>南心</u>回想被搶當晚，北

極星出現在前往拉薩之路的正前方偏左邊 50 度方向上。問南心前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？（註：太陽昇起方向設為正東；北極星出現的方向設為正北）

習題 3　如果將地球視為球體，那麼北緯 θ° 繞一週是赤道繞一週的幾倍。

習題 4　一漁夫晚上無聊，坐在船頭尋找北極星。漁夫發現，他必須仰角 30 度時，才可以正視著北極星。你能知道漁夫的船在北緯幾度嗎？

習題 5　設 a 為實數：

(1) 當 a 在那個範圍時，

$$2a+1, a^2+a+1, a^2+2a$$

可以是一個三角形的三邊邊長。

(2) 承(1)，邊長 a^2+a+1 所對應的角是幾度。

習題 6　設 S_n 代表單位圓（半徑是 1 的圓）內接正 n 邊形的邊長；T_n 代表單位圓外切正 n 邊形的邊長。

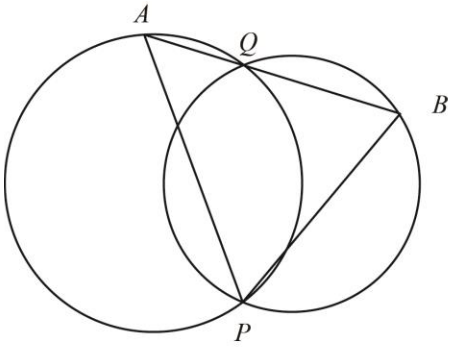
(1) 求 S_n, T_n 的值。

(2) 求

$$\left(4-S_n^2\right)\left(4+T_n^2\right)$$

的值。

習題 7　如下圖所示，兩個固定的圓相交於 P, Q 兩點。

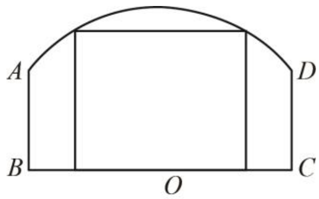


若線段 AB 通過 Q 點，且 A, B 兩點分別在兩個圓上，則比值

$$\frac{PB}{PA}$$

是個常數（與線段 AB 的選取無關）。

習題 8　如圖所示，在山壁上鑿出一隧道形狀的倉庫，上緣為圓弧 AD，其所在圓的圓心為 BC 的中點 O，半徑為 10 公尺，AB、CD 均垂直於 BC，且 $AB = CD = 5$ 公尺。今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡（如圖所示）。問：這矩形箱子的正面面積最大值是多少？



習題 9　化簡

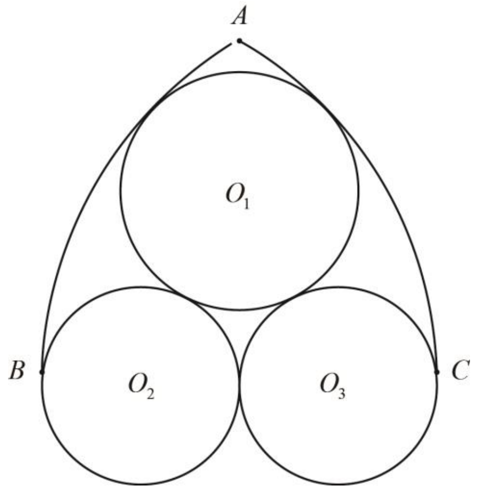
$$\frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} = ?$$

習題 10　承例題 10，如果甲、乙兩隻魚是 $k = 2$ 的魚種，$\alpha = 45^\circ$ 且

$$\frac{\text{乙魚消耗的能量}}{\text{甲魚消耗的能量}} = \sqrt{2}\ (\text{倍})。$$

試求角度 β 的值。

習題 11　《中學生數學》雜誌 2000 年第一期的封面是一幅歐洲教堂的照片，它是一座哥德式的建築。建築物上有一個窗戶的造型如下圖所示。圖中弧 AB 和弧 AC 分別是以 C 和 B 為圓心 BC 長為半徑的圓弧。圓 O_1、圓 O_2 和圓 O_3 兩兩相切，並且圓 O_1、圓 O_2 與弧 AB 相切，圓 O_1、圓 O_3 與弧 AC 相切，圓 O_2、圓 O_3 的半徑相等。如果使圓 O_2、圓 O_3 充分大，記線段 BC 的長度為 a，請你計算出圓 O_1 的半徑，並給出這個圓的作法。



習題 12　利用『海龍公式』求邊長為 13, 14, 15 的三角形之面積。

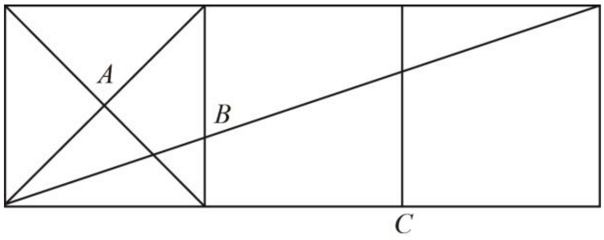
習題 13　利用『托勒密定理』證明『畢氏定理』。

習題 14　四邊形 $ABCD$ 是圓內接凸四邊形，而且三角形 ABC 剛好是正三角形。證明

$$DB = DA + DC.$$

習題 15　利用『三弦定理』證明『畢氏定理』。

習題 16　下圖是由三個正方形構成的矩形。證明：A, B, C 三點共線。

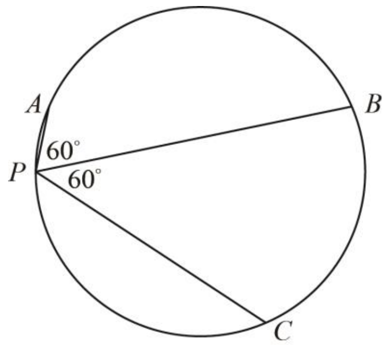


習題 17　（正切定理）利用正弦定理證明

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}.$$

習題 18　如右圖所示，證明

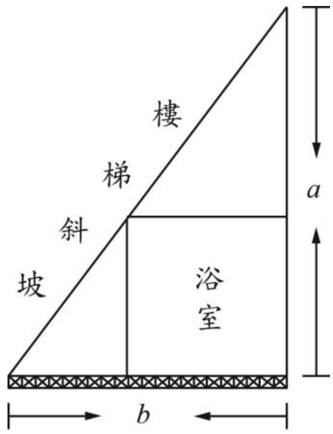
$$PB=PA+PC.$$



習題 19　右圖是某建設公司為節省空間，在樓梯下方設置一正方形浴室，浴室左上角恰與樓梯相接。

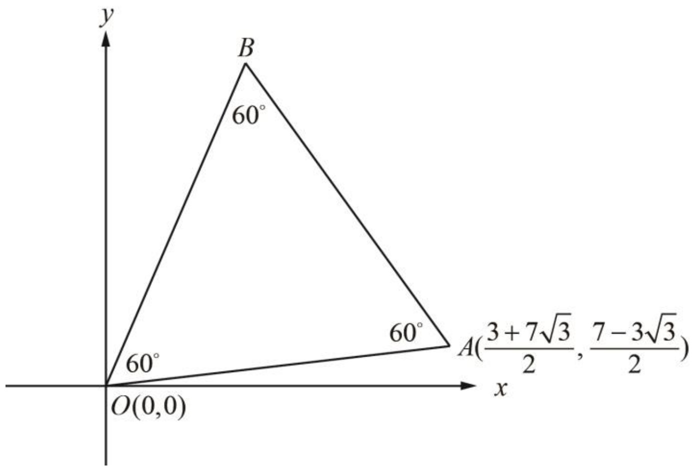
(1) 求浴室的邊長（以 a,b 表示）。

(2) 若 $a=2.8, b=2.1$，求樓梯斜坡長度及浴室邊長。



習題 20　下圖中，三角形 OAB 是坐標平面上的正三角形，且

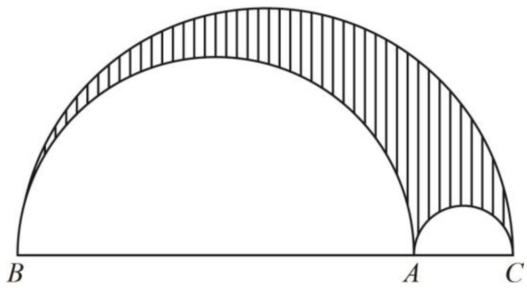
$$O=(0,0), A=\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2},\frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right).$$



求 B 點的坐標。

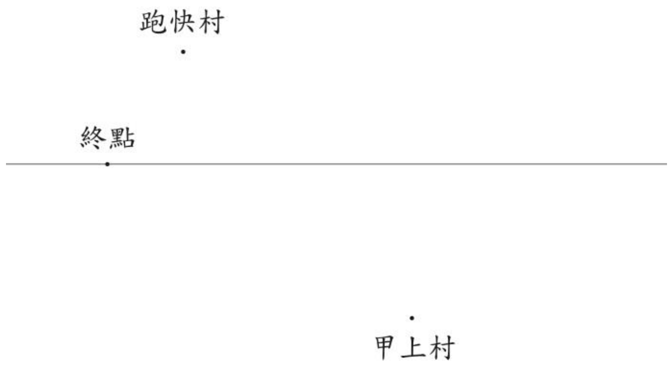
習題 21　已知 A、B、C、D、E 為某直線上相異的五個點且 A'、B'、C'、D'、E' 是不在此直線上的另五個相異點，其中 AA'、BB'、CC'、DD'、EE' 五直線兩兩平行。若 C'、D'、E' 分別為線段 $A'B$ 與線段 AB'；線段 $A'B$ 與線段 CB' 及線段 $A'C$ 與線段 AB' 的交點且 $DD'=20, EE'=30$ 則求線段 AA', BB' 及 CC' 長度。

習題 22　**(**阿爾別隆問題**)**右圖垂直線區域的形狀像古希臘做皮鞋用的阿爾別隆刀，它是由以 BC, AB, AC 為直徑的三個半圓所圍成的區域。證明：阿爾別隆刀的面積等於以 AH 為直徑的圓面積（AH 是與 BC 垂直的直線，H 是以 BC 為直徑的半圓與直線 AH 的交點）。



動手玩數學

每年過年的時候，甲上村與跑快村都會推出一位飛毛腿來一較高下。甲上村的飛毛腿從甲上村出發（新年正午時刻），跑快村的飛毛腿同時從跑快村起跑，在直線上找一個點當賽跑的終點（如圖所示，跑快村離直線的距離較甲上村近），先跑到終點者勝。終點的位置由當年的裁判決定。



(1) 如果裁判想當個中立的仲裁者，他該選擇那個點當終點。

(2) 如果裁判想偏袒跑快村的選手，他該選擇那個點當終點對跑快村的選手最有利。

參考文獻

[1] 許志農，問題集（第一、四、五集），《數學新天地》，龍騰文化。

[2] 許志農，《算術講義》（初級篇），自印。

[3] 許志農，《數學解題與思維》，未出版。

[4] 許志農，《恆春山海里當兵日記》，未出版。

[5] 蔡聰明，《數學的發現趣談》，三民書局。

[6] 曹亮吉，《阿草的葫蘆》，遠哲科學教育基金會。

[7] 侯明輝，一個值得重視的三弦定理，《上海中學數學》第五期（1995 年）。

[8] 陸劍豪譯（曼羅迪諾著），《歐基里得之窗-從平行線到超空間的幾何學故事》，究竟出版社。

[9] 樂嗣康，托勒密定理與三弦定理的關係，《數學傳播季刊》第 26 卷第 1 期， 54-57。

[10] 葉李華、李國偉譯（奧瑟曼著），《宇宙的詩篇》，天下文化。

[11] 葉偉文譯（倫迪・薩頓著），《典雅的幾何》，天下文化。

[12] 常庚哲、周炳蘭譯（戴維斯與赫希著），《笛卡爾之夢》，九章出版社。

[13] 胡守仁譯（毛爾著），《毛起來說三角》，天下文化。

[14] David Wells, You are a mathematician, John Wiley.

[15] A. S. Posamentier and C. T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications.

宇宙的詩篇……三角學與三角函數的習題解答

習題 1

(1) 因為 弧長=半徑×該弧的弧度，且

$$\theta^{\circ}=\theta\times\frac{\pi}{180}\,(\text{弧度}),$$

所以

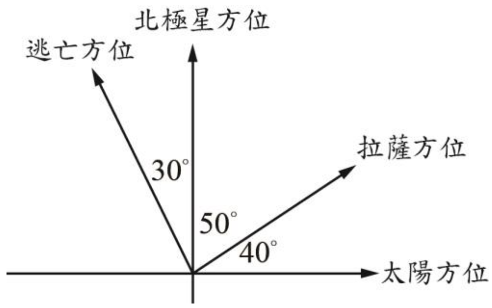
$$\text{弧長}\ =r=r\theta\times\frac{\pi}{180}\Rightarrow\theta=\frac{180}{\pi}\doteq 57.3.$$

(2) 因為扇形面積$=\dfrac{1}{2}$半徑^2 × 該弧的弧度 ，所以扇形面積為

$$\frac{1}{2}r^{2}\times\theta\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi r^{2}}{360}\times\frac{180}{\pi}=\frac{r^{2}}{2}.$$

習題 2

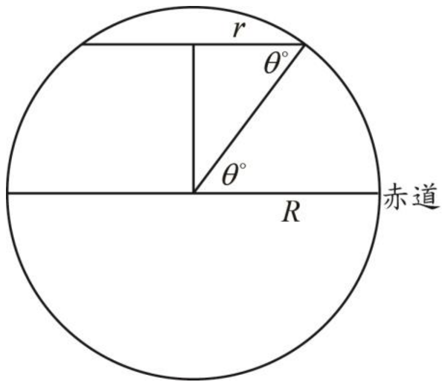
可令「太陽出現方位是 x 軸」,「北極星出現方位 y 軸」, 並將逃亡方位與拉薩方位依題意描繪如下圖。由圖知道逃亡方位與拉薩方位的夾角為80°。



習題 3

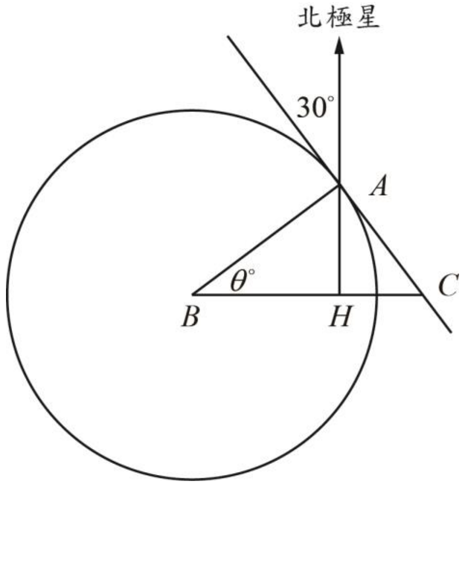
如下圖，欲求的答案為

$$\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}=\cos\theta\,(\text{倍})\text{。}$$



習題 4

如下圖所示，設漁夫在北緯θ°方位（即A點位置）。因為CA是漁夫在北緯θ°方位時的水平方向，所以CA與BA垂直，而且CA與HA夾30°，即$\angle CAH = 30^\circ$。因此$\angle BAH = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$。再由$BC$與$AH$垂直得到$\theta^\circ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$。所以漁夫在北緯$30^\circ$方位。



習題 5

(1) 構成三角形的充分條件是「任一兩邊的和必須大於第三邊。」

$$\begin{cases}(2a+1)+\left(a^2+a+1\right)>a^2+2a;\\(2a+1)+\left(a^2+2a\right)>a^2+a+1;\\\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+2a\right)>2a+1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2<a;\\0<a;\\a(2a+1)>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0<a;\\a<-\frac{1}{2}\text{ 或 }0<a\end{cases}$$

$$\Rightarrow 0<a.$$

因此，只要$a>0$就可以。

(2) 設該角為θ（$0^\circ<\theta<180^\circ$），利用餘弦定理得到

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{(2a+1)^2+\left(a^2+2a\right)^2-\left(a^2+a+1\right)^2}{2\left(a^2+2a\right)(2a+1)}\\&=\frac{(2a+1)^2+\left(2a^2+3a+1\right)\left(a-1\right)}{2a(a+2)(2a+1)}\\&=\frac{(2a+1)^2+(a+1)(2a+1)(a-1)}{2a(a+2)(2a+1)}\\&=\frac{(2a+1)+(a+1)(a-1)}{2a(a+2)}\\&=\frac{a(a+2)}{2a(a+2)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由此解得$\theta=60^\circ$。

習題 6

(1) $S_n=2\sin\frac{\pi}{n},\ T_n=2\tan\frac{\pi}{n}.$

(2) 由$S_n=2\sin\frac{\pi}{n}$及$T_n=2\tan\frac{\pi}{n}$得

$$\left(4-S_n^2\right)\left(4+T_n^2\right)=16\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\tan^2\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{n}\left(1+\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)$$
$$=16.$$

習題 7

考慮三角形 PAB，令 R 為其外接圓的半徑。由正弦定理得到

$$\frac{PA}{\sin\angle PBQ}=\frac{PB}{\sin\angle PAQ}=2R\Rightarrow\frac{PB}{PA}=\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle PBQ}.$$

無論如何選取線段 AB，$\angle PAQ$ 與 $\angle PBQ$ 都是對應到兩圓交弦 PQ 的圓周角，故為定角(對等弦的圓周角都相等)。因此比值

$$\frac{PB}{PA}$$

為一常數。

【註】這是很好的「正弦定理」測驗題。

習題 8

設矩形箱子與隧道上緣的兩個接處點（就是矩形箱子上方的兩個頂點）中，離 A 較近的點為 P，令 $\angle POB=\theta$。由 $AB=5, AO=10$ 得到 $\angle AOB=30^\circ$，所以 $30^\circ\le\theta\le 90^\circ$。

矩形箱子的正面面積為

$$\text{矩形高}\times\text{矩形寬}=(10\sin\theta)\times(2\cdot 10\cos\theta)=100\sin(2\theta).$$

顯然，當 $\theta=45^\circ$ 時，矩形箱子的正面面積最大，它的值是 100 平方公尺。

習題 9

$$\begin{aligned}\frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos(60^\circ - 20^\circ) - \cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{(2\cos 60^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 60^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{(\cos 20^\circ + 2\sin 60^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{2\sin 60^\circ \sin 20^\circ}\\ &= \frac{1}{2\sin 60^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

習題 10

將 $\alpha = 45^\circ$ 代入能量公式得到

$$\begin{aligned}\frac{\sin 45^\circ + 2\sin\beta}{\sin 45^\circ \cos\beta + \sin\beta\cos 45^\circ} = \sqrt{2} &\Rightarrow \cos\beta - \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Rightarrow (\cos\beta - \sin\beta)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow 1 - 2\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \sin(2\beta) = \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow 2\beta = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ\\ &\Rightarrow \beta = 15^\circ \text{ 或 } 75^\circ.\end{aligned}$$

當 $\beta = 75^\circ$ 時，$\cos\beta - \sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$ 不合。因此 $\beta = 15^\circ$。

習題 11

設圓 O_1、圓 O_2 相切於點 E，圓 O_1、圓 O_3 相切於點 F，圓 O_2、圓 O_3 相切於點 D，圓 O_1、

與弧 AB 相切於點 G。顯然，點 F 在線段 O_1O_3，點 G 在 CO_1 的延長線上，且 $O_1D \perp BC$，易知圓 O_2 和圓 O_3 的半徑為 $\frac{a}{4}$。如果圓 O_1 的半徑為 r，就有 $CO_1 = a-r, CD = \frac{a}{2}$, $O_1O_3 = r+\frac{a}{4}$。由畢氏定理及這些數據可得

$$\begin{aligned} CO_1^2 - CD^2 = O_1D^2 &= O_1O_3^2 - O_3D^2 \\ \Rightarrow (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(r+\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

整理解得 $r = 0.3a$。故圓 O_1 的半徑為 $r = 0.3a$，它的圓心 O_1 是以 O_2 為圓心，$0.25a + 0.3a = 0.55a$ 為半徑的圓與 BC 的中垂線的交點。

習題 12

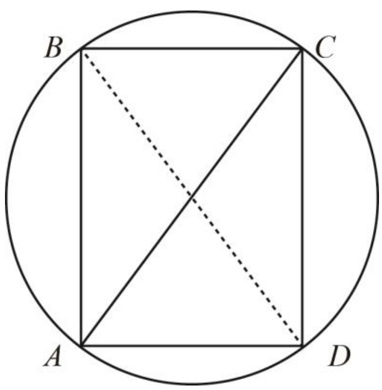
由海龍公式得到 $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$，三角形面積為

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84.$$

習題 13

設 ABC 為直角三角形，作它的外接圓如下圖，並在圓上取一點 D 使得四邊形 $ABCD$ 為矩形，因此 $AB = CD, BC = AD, AC = BD$。利用『托勒密定理』得到

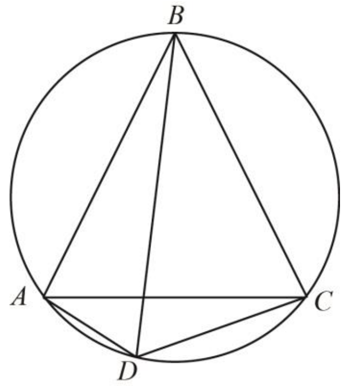
$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2.$$



習題 14

因為 ABC 是正三角形，所以 $AB = BC = AC$ 。由『托勒密定理』得到

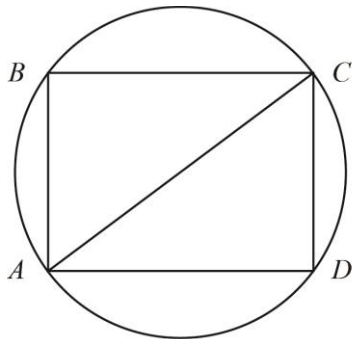
$$AC \times DB = AB \times DC + BC \times DA \Rightarrow DB = DA + DC.$$



習題 15

如圖，三角形 ABC 是直角三角形，作它的外接圓如下圖，並在圓上取一點 D 使得四邊形 $ABCD$ 為矩形。由『三弦定理』得到

$$\begin{aligned}
&AC\sin\angle BAD = AB\sin\angle CAD + AD\sin\angle CAB \\
&\Rightarrow AC\sin\angle 90^\circ = AB \times \frac{CD}{AC} + AD \times \frac{BC}{AC} \\
&\Rightarrow AC = AB \times \frac{AB}{AC} + AD \times \frac{AD}{AC} \\
&\Rightarrow AC^2 = AB^2 + AD^2.
\end{aligned}$$



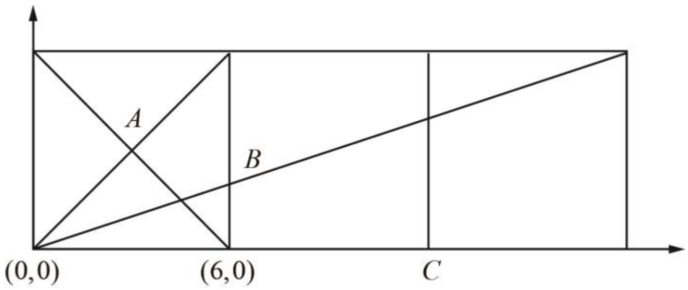
習題 16

採取「座標法」來處理本問題：考慮如下的座標，顯然 A, B, C 的座標分別為

$A(3,3), B(6,2), C(12,0)$ 。通過 BC 的直線方程式為

$$\frac{y-0}{x-12}=\frac{0-2}{12-6}\Rightarrow x+3y=12.$$

將 $A(3,3)$ 代入此方程式，得到 $3+3\times 3=12$，因此 A 點亦在直線 BC 上。所以 A,B,C 三點共直線。



習題 17

設 R 為三角形 ABC 外接圓半徑。由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R.$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b}&=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}\\&=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}\\&=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\\&=\frac{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}}\\&=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}.\end{aligned}$$

習題 18

利用『三弦定理』得到

$$PB\sin 120^\circ = PA\sin 60^\circ + PC\sin 60^\circ \Rightarrow PB = PA + PC.$$

習題 19

(1) 設浴室邊長為 c，利用「大直角三角形面積＝兩個小直角三角形面積＋浴室面積」得到

$$\frac{ab}{2} = \frac{(a-c)c+(b-c)c}{2} + c^2 \Rightarrow c = \frac{ab}{a+b}.$$

(2) 依畢氏定理得到

$$\text{樓梯斜坡 } = \sqrt{2.8^2 + 2.1^2} = 3.5.$$

將 $a = 2.8, b = 2.1$ 代入(1)的公式得到

$$\text{浴室邊長 } = \frac{2.8 \times 2.1}{2.8 + 2.1} = 1.2.$$

習題 20

將座標平面換成複數平面，A點的複數座標為

$$\frac{3+7\sqrt{3}}{2} + \frac{7-3\sqrt{3}}{2}i$$

設 B 點的複數座標為 $x+yi$。因為 $\angle BOA = 60^\circ, BO = AO$，所以

$$\begin{aligned}
&\frac{B\text{點的複數座標}}{A\text{點的複數座標}} = (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \\
&\Rightarrow \frac{x+yi}{\dfrac{3+7\sqrt{3}}{2} + \dfrac{7-3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&\Rightarrow x+yi = \left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2} + \frac{7-3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3+7i.
\end{aligned}$$

因此 B 點的座標為 $(3,7)$。

習題 21

如下圖所示，利用 $DD'=20, EE'=30$ 及**例題 15** 的結論：

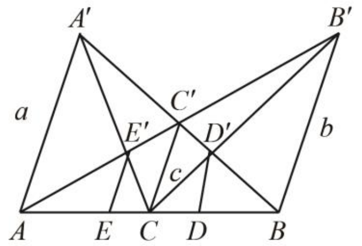
$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}; \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{30}; \\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

取第一式的 2 倍與第二式，第三式相加得到

$$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{3}{c}=\frac{1}{12} \Rightarrow c=36.$$

將 $c=36$ 代入第二式與第三式得到

$$a=180, b=45.$$



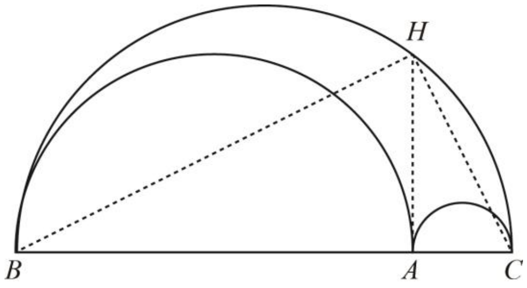
習題 22

如下圖所示，以 BC 為直徑的半圓半徑 $\dfrac{BC}{2}=\dfrac{(AB+AC)}{2}$。因此阿爾別隆刀的面積等於

$$\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi}{4}\times(AB\times AC).$$

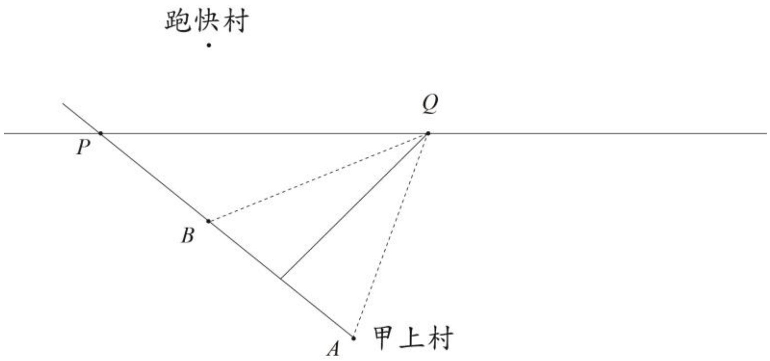
因為 $HA^2=AB\times AC$，所以阿爾別隆刀的面積為

$$\pi\left(\frac{AH}{2}\right)^2=\text{以 } AH \text{ 為直徑的圓面積}.$$



動手玩數學參考解答

設A點是甲上村，跑快村對水平線的對稱點為B。Q點是線段AB的中垂線與水平線的交點。因為水平線上的點到跑快村的距離等於到B點的距離，所以可以將跑快村視為B來看。



(1) 因為Q在AB的中垂線上，所以選Q為終點是最公平的選法。

(2) 當裁判選定P為終點時，甲上村所跑得距離比跑快村多AB的長度。如果選定P'為終點，且$P' \neq P$時，因為$P'AB$是一個三角形，所以

$$|P'A - P'B| < AB.$$

故裁判選P為終點時，對跑快村最有利。