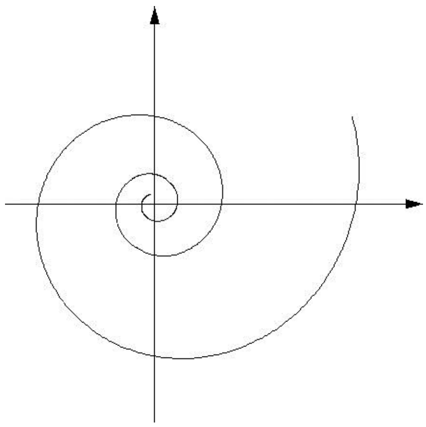
9 昔日的計算利器……指數與對數



鸚鵡螺與對數螺線

四則運算中「＋」、「－」的計算量與困難度相對於「×」、「÷」減少許多，所以世界各地紛紛發現幫助作「×」、「÷」運算的『九九乘法表』，但卻不常出現幫助作「＋」、「－」運算的「加、減表」。中國湘西里耶最近發現兩萬多枚秦簡，其中一枚書寫著古代的乘法口訣表。事實上，在《管子》、《荀子》、《戰國策》等先秦典籍中都提到「九九」，也就是乘法表，足見乘法表的運算在春秋戰國時已很普遍。在古巴比倫的泥版書上也有乘法表的記載。有了乘法口訣表，還是要靠手算，當計算的式子無比繁雜時（如天文、航海的測量資料與利息的計算等），單靠手上的九九乘法表可能會算得很辛苦，『對數表』就在這樣的時空背景下上場了。

從納皮爾在 1614 年發表《對數的奇妙準則》這篇論文起，到 1960 年電子計算器發明的這三百餘年裡，對數表一直是炙手可熱的計算工具，不知節省了人們多少寶貴的計算時間。難怪數學家拉普拉斯就說：「對數的發明，讓天文學家的壽命都延長了，因為少做了許多苦工。」

在 1964 年積體電路計算機與後來的個人電腦相繼發明之後，昔日被稱為計算利器的『對數表』馬上被淘汰出局，精打細算與運籌帷幄的粗活就交給電腦去傷腦筋了。隨著電腦科技的進步，英特爾於 2002 年 11 月 14 日發表時脈高達 3 GHz 的 P4 處理器，3 GHz 到底多快呢？如果把處理器的一個運算週期當作人的一個步伐，那麼 3 GHz 意味著一個人每秒鐘可走 10 億步（相當於 0.28 秒就可以從地球走到月球）。計算工具（手算、巴比倫倒數表、乘法表、中世紀的手指算法、中國算盤、納皮爾尺桿、對數表、心算[1]、萊布

尼茲數輪機、計算機、高速電腦）的演變不僅豐富了人類的知識，也滿足人們追求速度的快感。

『對數表』退出了計算市場，並不代表學習指數與對數是多餘的。因為指數與對數在天文學、自然科學、生物世界、生命科學與機率統計裡依然扮演著舉足輕重的角色，幾乎所有自然科學與生物世界裡的數學遊戲，都可以找到指數與對數函數的蹤跡。

[1] 心算是可以很快的，大陸的心算神童申克功在十三秒內算出 $\sqrt[13]{13060694016}=6$。更神的是，一位 37 歲的印度婦女莎姑達拉，她只用 50 秒鐘就算出一個 201 位數的 23 次方根，並且擊敗當時最快的電腦。她算出的正確答案是 546372891，試想滿足 $\sqrt[23]{N}=546372891$ 的 201 位數 N 有多複雜。

9.1 用指數函數來預測生物的數量

舉凡「放射性物質的衰變率」、「傳染病的擴散速率」、「生物的數量」、「謠言與八卦新聞的傳播速度」、「藥物或酒精在體內的吸收速率」、「人的各種學習曲線」等都與指數函數有關連。就以「生物的數量」來說，生物與經濟學家經常使用『馬爾薩斯模型』[2] 與『羅吉斯模型』兩種模型來預測人口或者是某生物未來的數量，這兩種模型都與指數函數相關。底下的例子就是有關「熊口數」的羅吉斯模型：

[2] 馬爾薩斯是工業革命時期的英國經濟學家，1798 年出版《人口論》一書。

例題 1 經過長期的追蹤調查，某國家公園 10 年前有 10 隻熊，這 10 年來熊的數量一直符合數學模式

$$B(t)=\frac{100}{1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)}},$$

即 $t(0\le t\le 10)$ 年前，熊的數量約有 $B(-t)$ 隻。假設未來熊的數量仍按照這數學模式成長（即 t 年後，熊的數量約有 $B(t)$ 隻）。

(1) 現在熊的數量是幾隻。

(2) 再過幾年，熊的數量才會達到 50 隻。

【解】關於(1)：將 $t=0$ 代入得到：現在共有

$$B(0)=\frac{100}{1+9\cdot 3^{-0.1(0+10)}}=25$$

隻熊。

關於(2)：假設 t 年後，熊的數量會達到 50 隻，那麼

$$\begin{aligned}B(t)=50 &\Rightarrow \frac{100}{1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)}}=50\\ &\Rightarrow 1=3^{1-\frac{t}{10}}\\ &\Rightarrow t=10.\end{aligned}$$

依此數學模式，再過 10 年，熊的數量才會達到 50 隻。

例題 2　對「接觸便會感染，而且感染後便能免疫永不再犯」這類傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t)=\frac{\text{在時間}\,t\,\text{時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}.$$

根據理論得知，感染率 $I(t)$ 都會符合

$$I(t)=\frac{1}{1+a\cdot 7^{-bt}}$$

這樣的數學模型，而且當 $I(t)=\dfrac{1}{2}$ 的時間 t 是該傳染病的傳染高峰。

有一這類型的傳染病在某個城市蔓延，剛開始（即 $t=0$ 時），有 2% 的人口被傳染，而 $t=3$ 時，有 12.5% 的人口被傳染。

(1) 試求感染率 $I(t)$ 中的常數 a 與 b 的值。

(2) 當 t 為何時，是該傳染病的傳染高峰。

(3) 當 $t=12$ 時，該城有多少比例的人口被傳染過該傳染病。

【解】關於(1)：將 $I(0)=2\%, I(3)=12.5\%$ 代入得到

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{2}{100}; \\ \dfrac{1}{1+a\cdot 7^{-3b}} = \dfrac{12.5}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 49; \\ \dfrac{1}{1+7^{2-3b}} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 49; \\ b = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

關於(2)：由(1)得到

$$I(t) = \frac{1}{1+7^{2-\frac{t}{3}}}.$$

解 $I(t) = \dfrac{1}{2}$ 得到

$$\frac{1}{1+7^{2-\frac{t}{3}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 7^0 = 7^{2-\frac{t}{3}}$$

$$\Rightarrow t = 6.$$

關於(3)：將 $t=12$ 代入得到

$$I(12) = \frac{1}{1+7^{2-\frac{12}{3}}} = \frac{49}{50} = 98\%.$$

下個例子是有關「人的學習曲線」的數學模型：

例題 3　心理學家常用數學模式 $L(t) = a\left(1-10^{-bt}\right)$ 來描述學生經過 t 時間的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。

有一學生一星期可以背熟 75 個單字，兩星期可以背熟 135 個單字。試問：這學生三星期可以背熟幾個生字。

【解】由題意知道

$$\begin{cases} L(1)=75=a\left(1-10^{-b}\right); \\ L(2)=135=a\left(1-10^{-2b}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{75}{135}=\frac{1-10^{-b}}{1-10^{-2b}}$$

$$\Rightarrow 5\left(10^{-b}\right)^2-9\left(10^{-b}\right)+4=0$$

$$\Rightarrow 10^{-b}=\frac{4}{5} \text{ 或 } 1(\text{不合})。$$

將 $10^{-b}=\dfrac{4}{5}$ 代回原方程組得到

$$75=a\left(1-\frac{4}{5}\right)\Rightarrow a=375.$$

這學生三星期能背熟

$$L(3)=a\left(1-10^{-3b}\right)=375\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)=183$$

個生字。

9.2 企業的學習曲線與指數函數的關係

學習曲線最早產生於二次世界大戰時的飛機製造業。萊特博士就其觀察經驗發現：生產一連串特定機型的飛機時，製造每一架飛機的平均工時會逐次降低，因此特性而提出學習曲線的觀念。後來，這一觀點即為各行業所廣泛使用。當時發現生產每架飛機所需的平均工時隨著飛機累積數量的增加很有規律地減少。例如，某一型轟炸機，製造第一架時，整整花費了一整年的工時，但是一個有趣的現象是：生產第 8 架所需的工時只是第 4 架的 80%，第 12 架所需的工時只是第 6 架的 80%，……，等等。也就是說，在任何一種情況下所發生的現象都是，當產量增加一倍時，所需生產工時就減少了 20%。現在稱 $\dfrac{4}{5}=80\%$ 為製造這型轟炸機的『學習率』。如果利用函數 $T(n)$ 表示「製造第 n 架轟炸機所需工時（年）」，那麼數學家所建立的「製造這型轟炸機的學習曲線」為

$$T(n)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2 n}=1\times n^{\log_2 \frac{4}{5}}.$$

例題 4　說明上述模型$T(n)$符合「在任何一種情況下所發生的現象都是，當產量增加一倍時，所需生產時間就減少了 20%。」。

【解】只需說明「生產第$2n$架所需的時間只是第n架的80%」即可。代入模型得到

$$\frac{T(2n)}{T(n)}=\frac{1\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2 2n}}{1\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2 n}}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{(\log_2 2+\log_2 n)-\log_2 n}$$

$$=\frac{4}{5}.$$

像上述生產物品所需時間的『學習曲線』也發生在生產物品所需「成本」的控制上。就以張忠謀在交大 EMBA 上課講義舉的例子為例：電腦的動態隨機存取記憶體（DRAM），每一次累積量產增加一倍時，成本就降低 30%。令P是生產第一批動態隨機存取記憶體的每顆平均成本，$f(n)$代表生產第n批動態隨機存取記憶體的每顆平均成本（假設每一批都生產同樣的顆數）。因為生產動態隨機存取記憶體的學習率為$\frac{7}{10}=70\%$，所以其學習曲線$f(n)$可以表為

$$f(n)=P\times\left(\frac{7}{10}\right)^{\log_2 n}=P\times n^{\log_2\frac{7}{10}}.$$

〔註〕電子零件或通訊產品（如手機、PDA 等）的生產時間或量產成本都具有上述的『學習曲線』特性，只是不同產品有不同的學習率而已。

例題 5　某電子公司生產一新型手機，根據該公司以往的學習曲線知道：這款手機量產之後第x個月的每支生產成本$f(x)$（千元）會符合數學模式

$$f(x)=\frac{7}{\sqrt{x}}.$$

(1) 說明

$$\frac{\text{量產之後第 }2x\text{ 個月的每支生產成本}}{\text{量產之後第 }x\text{ 個月的每支生產成本}}$$

是一個與 x 無關的固定常數，並求此常數。

(2) 為了讓此款手機有競爭力，廠商將量產之後第 x 個月的每支售價訂為 $p(x)=2+\dfrac{3}{x}$（千元）。問：廠商從第幾個月之後才有辦法達到不虧損的情況。

【解】關於(1)：由計算式

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{\dfrac{7}{\sqrt{2x}}}{\dfrac{7}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

知道「欲求的分數恆等於常數 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，與 x 的取值無關。」

關於(2)：由售價與成本相減得到 $p(x)-f(x)=2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{\sqrt{x}}$。欲不虧損，必須

$$2+\frac{3}{x}-\frac{7}{\sqrt{x}}\geq 0$$

$$2\sqrt{x}^2-7\sqrt{x}+3\geq 0$$

$$(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)\geq 0$$

$$\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad\sqrt{x}\geq 3.$$

因為 x 是正整數，所以解得 $x\geq 9$，即從第 9 個月之後才有辦法達到不虧損的情況。

〔註〕另一種更具價格破壞性的定價模式為

$$p(x)=a-b\sqrt{x}$$

的形式。這種定價模式會使手機的生命週期縮短。

9.3 利用對數表做計算……諾貝爾獎金有多少

對數是納皮爾在 1614 年發明的，納皮爾用了二十年的精力，造出世界上最早的對數表，他曾說：「我總是盡我的精力與才能來擺脫那種繁重而單調的計算，這種令人厭煩的計算常常嚇倒許多學習數學的人。」納皮爾將他的發明寫成一篇名為《對數的奇妙準則》的論文發表。一般在計算中，以 10 為底的『常用對數』是布里格斯建議納皮爾使用的。

布里格斯及後來的人所製定的「常用對數表」在計算機普及之前，是相當重要的計算工具。例如：天文學家克卜勒在行星軌道的繁雜計算中，成功應用了對數。常用對數對於計算的好處在於下列三則等式：

$$\log a\times b=\log a+\log b;$$
$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b;$$
$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\times\log a.$$

有了這些等式，再加上完整的對數表，就可以輕易的將「相乘」、「相除」或「開根號」的繁雜計算轉換成「相加」、「相減」或「簡易除式」的計算。就以舉世聞名的諾貝爾獎金為例：諾貝爾是瑞典的化學家、產業家、甘油炸藥的發明者，他用其巨額遺產創立了舉世聞名的諾貝爾獎金。1895 年 11 月 27 日，諾貝爾簽署了他死後遺留下來的所有可變賣財產的遺囑：將全部財產作為設立諾貝爾獎金的基金，每年取出基金利息，獎給對人類文化科學事業做出重大貢獻的人。根據當時估計，他的遺產約有三千三百萬克朗（瑞典幣，約折合 920 萬美元）。1896 年 12 月 10 日，諾貝爾因心臟病突然發作，搶救無效，在義大利聖雷莫與世長辭，終年 63 歲。

例題 6　如果諾貝爾獎金從 1897 年 1 月 1 日算起，不考慮戰爭造成的貨幣貶值或提撥出來當獎金的因素，而以平均 5%的年利率複利計算。試問：在諾貝爾死後百年（1996 年年底）時，諾貝爾獎金的本利和該有多少美元（千萬以下四捨五入）。

【解】由複利公式得到：應有

$$920(1+5\%)^{100}=920\times1.05^{100}\ \text{(萬美元)}。$$

將 1.05^{100} 取對數及由對數表的 $\log1.05=0.0212$ 得到

$$\log1.05^{100}=100\times\log1.05=2+0.12.$$

再由對數表（佐以表尾差）知道：$\log1.318=0.1199,\log1.319=0.1202$。因此

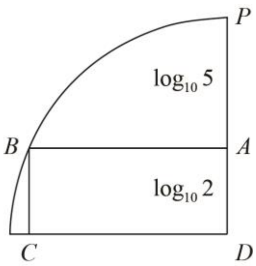
$$131.8<1.05^{100}<131.9.$$

由此知道

$$121256 < 920 \times 1.05^{100} < 121348.$$

因此，諾貝爾獎金應有 12 億 1 千萬美元。

例題 7　如下圖：D 點是四分之一圓的圓心，$ABCD$ 是矩形，且 $AP = \log 5, AD = \log 2$。求 AC 的長度。



【解】因為 $AC = DB =$ 半圓半徑，所以

$$AC = DP = DA + AP = \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1.$$

例題 8　求 2.512^5 的近似值至整數。

【參考值：$\log_{10} 2.512 = 0.4000$】

【解】因為

$$\log_{10} 2.512^5 = 5\log_{10} 2.512 = 2.0000 \Rightarrow 2.512^5 = 10^2 = 100.$$

9.4 沒有對數，人的感覺是黑白的

人類的五種感覺，『視覺』、『聽覺』、『嗅覺』、『味覺』、『觸覺』，都和對數扯上關係。德國生理學家韋伯（E. H. Weber, 1795-1878）在 1825 年作出一個數學定律，用來度量人對各種身體刺激的反應，後來，德國的科學家費克納（G. T. Fechner, 1801-1887）就發現這種關係，他宣布了一條定律（稱為『韋伯-費克納定律』）說：「人類對任何刺激的反應，與這些刺激強度的對數成正比。」也就是說，人類的感官對外界的刺激訊號會符合對數

化的反應方程式

$$s = k\log_{10} w,$$

這裡的 w 是外界刺激訊號的發送強度，而 s 代表人對這刺激訊號強度的反應量（感受程度），常數 k 是與人及刺激訊號種類相關的係數。以耳朵的『聽覺』為例，當聲音強度是「正常聽力所能聽到最小的聲音能量」的 w 倍時，測量聲音的儀器或人的耳朵所感受到的反應量是 $10\log_{10} w$ 分貝。也就是說，『聽覺』的韋伯-費克納方程式為

$$s = 10\log_{10} w,$$

w 代表聲音強度，而 s（分貝）是指儀器或耳朵接收到的感受量。

例題 9 已知一般交談約為 60 分貝，飛機起飛噪音約為 120 分貝。試問：飛機起飛噪音功率是一般交談聲音功率的幾倍。

【解】設飛機起飛噪音功率為 w_1，一般交談聲音功率為 w_2。依『聽覺』的韋伯-費克納方程式得到

$$120 = 10\log_{10} w_1,\ 60 = 10\log_{10} w_2.$$

兩式相減得到

$$\log_{10}\frac{w_1}{w_2} = 6 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = 10^6\ (\text{倍})。$$

〔註〕120 分貝僅是 60 分貝的 2 倍，但是欲產生 120 分貝的能量是產生 60 分貝能量的 10^6 倍。這是上天為了保護人的聽覺而創造的耳朵系統。想要利用所謂的『魔音傳腦』整人是很不容易發生的，因為需要很大的能量放送才能製造出這樣的噪音。

再以眼睛的『視覺』為例，早在兩千年前，古希臘的天文學家、數學家托勒密以他的眼睛感受到的強弱程度將天上的星星分成 1,2,3,4,5,6 等（現在稱為『目視星等』）。直到十九世紀發明了光學儀器，才確認出托勒密所認定的 1 等星的發光光度事實上是 2 等星發光光度的 2.512 倍（同樣的 2 等星的發光光度事實上是 3 等星發光光度的 2.512 倍，……，

依此類推)。有了光學儀器之後，就能測出更多的星等，例如太陽的目視星等為 -26.7，北極星為 1.99，天狼星是 -1.45。顯然發光光度較強大的星星的目視星等是負值。如果將 0 等星的發光強度定為 1，那麼依『視覺』的韋伯-費克納方程式，可以將目視星等 m 與儀器測量到的發光強度 w 的關係列式為

$$m = -\log_{2.512} w.$$

例題 10　利用例題 8 的近似值：

(1) 目視星等為 6 等的星星之發光強度是 1 等星的幾倍。

(2) 目視星等為 -1.5 等的星星之發光強度是 1 等星的幾倍。

【解】關於(1)：因為 6 等的星星的發光強度是 1 等星的

$$\frac{1}{2.512^5}$$

倍，所以約為 $\frac{1}{100}$ 倍。

關於(2)：-1.5 等星的發光強度是 1 等星的

$$2.512^{1-(-1.5)} = 2.512^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2.512^5} = \sqrt{100} = 10$$

倍。

9.5 對數座標……將大自然的方程式直線化

克卜勒行星運動第三定律是說：繞著同一恆星（如我們的太陽等）的諸行星（如我們的地球，火星，木星等）之週期 T 與運行軌道半徑 R（假設運行軌道為圓）會滿足如下的數學關係式

$$R = aT^{\frac{2}{3}},$$

這裡的常數 a 與恆星相關。克卜勒花了很長的時間才看出 R 與 T 之間關係。如果把 $\log R$ 當 y 座標，$\log T$ 當 x 座標，那麼對克卜勒方程式取對數得到

$$\log R=\log a+\frac{2}{3}\log T\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+c,\ (c=\log a).$$

這方程式是一條直線，因此克卜勒第三運動定律是說：「週期 T 與運行軌道半徑 R 的對數座標在一條斜率為 $\frac{2}{3}$ 的直線上。」聰明的讀者可以試著將太陽系的九大行星之運行週期 T 與運行軌道半徑 R 分別取對數，看看是否落在一條直線上。

1960 年的智利大地震，芮氏地震規模 8.9，是目前所觀測到的最大地震規模。地震規模與它所釋放能量的對應關係是地震學家所關心的重要函數。

例題 11　(芮氏地震規模與釋放能量的關係)地震規模的觀念是由芮氏在 1935 年所提出的，稱為芮氏地震規模，用符號 x 表示。地震能量是地震所釋放的能量，用符號 $f(x)$ 代表。芮氏地震規模越大，所釋放的地震能量也越大。貝氏根據經驗法則，於 1966 年提出芮氏地震規模與地震能量的參考關係式為

$$\log_{10} f(x)=5.24+1.44x.$$

如果芮氏地震規模增加 1，那麼釋放的能量增加約為原能量的幾倍（取整數部分）？

【對數參考值：$\log_{10}2=0.3010,\log_{10}3=0.4771,\log_{10}7=0.8451$】

【解】將 $\log_{10} f(x+1)$ 與 $\log_{10} f(x)$ 代入公式，相減得到

$$\log_{10} f(x+1)-\log_{10} f(x)=1.44\Rightarrow\log_{10}\frac{f(x+1)}{f(x)}=1.44.$$

由對數參考值知道：$\log_{10}27=1.4313,\log_{10}28=1.4471$。所以

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=27.\cdots$$

的整數部分為 27。答案為 27 倍。

例題 12　著名的『牛頓萬有引力定律』是說：質量 M 與 m 的兩物體彼此間的引力 F 可以用公式

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{D^2}$$

來描述，這裡的 D 代表兩物體的距離，G 是萬有引力常數。令 $x=\log_{10} D, y=\log_{10} F$，如果將兩物體的質量固定，證明：$x$ 與 y 是線性函數的關係，並求此線性函數的斜率。

【解】將萬有引力公式取對數得到

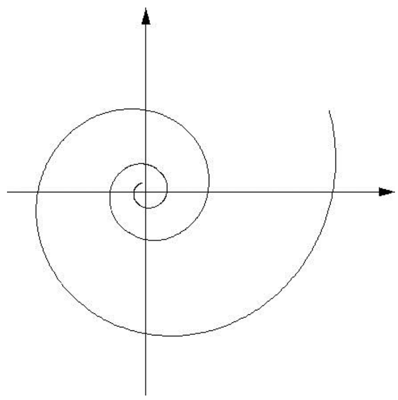
$$\log_{10} F = \log_{10}\left(G \cdot \frac{M \cdot m}{D^2}\right) = \log_{10} G + \log_{10} M + \log_{10} m - 2\log_{10} D.$$

代入 $x=\log_{10} D, y=\log_{10} F$ 得到

$$2x + y = \log_{10} G + \log_{10} M + \log_{10} m.$$

由此知道 x, y 是斜率為 -2 的線性關係。

9.6 藝術與指數函數相遇的地方



將鸚鵡螺的殼剖開，其光滑外殼的曲線很像右圖的形狀，稱為『對數螺線』。這種對數螺線往內會旋轉至一個中心點，向外則以一種特定的規律旋轉。規律是這樣的，由中心點任意畫一條向外的射線，此射線與對數螺線的交點中，分別計算他們至中心點的距離，一律呈等比數列，且這公比與射線的選取方向無關。如右圖，X 軸正向的射線與對數螺線剛好交於三點，如果你用尺仔細測量，會發現此三點與中心的距離比為 $1:3:9$，也就是說這是公比為 3 的『對數螺線』。自然界裡，對數螺線的實例不勝枚舉，如「（牛、羊等）獸角的彎曲形狀」,「向日葵、鳳梨與雛菊上的螺旋紋」、「飛蛾在燈火附近飛行，其撲火的路徑」。對於『對數螺線』的探討，以白努利的成果最為豐碩，臨歿遺言要求將對數螺線刻在他墓碑上。由於墓刻師傅的陰錯陽差，誤將『阿基米得螺線』刻在白努利墓碑上。『對數螺線』。有時被稱為『等角螺線』，值得一提的是公比為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的『對數螺線』又稱為『黃金螺線』，這是因為公比恰為黃金分割常數的關係。植物的螺旋紋常常是黃金螺線。

例題 13　阿螺正在研究某一對數螺線。他從該螺線的中心畫一條射線，該射線與對數螺線剛好交於 6 個點，離中心最近的交點與中心的距離為 128 公分。更巧的是，這 6 個交點與中心的距離都是整數（以公分計），而且都不超過 1000 公分。

(1) 問：該對數螺線的公比為何？

(2) 求其餘 5 個交點至中心的距離。

【解】關於(1)：因為六個距離都是整數，且成等比數列，所以公比必須為假分數，令為 $\frac{q}{p}$，p,q 是互質的整數，且 $q>p$。因為 128 之後 5 項都是正整數，所以 $p^5\,|\,128$。由 $128=2^7$ 得到 $p=2$。因為 $q\geq p+1=3$，所以 $q=3,5,7,\cdots$。當 $q\geq 5$ 時，第 6 項 ≥

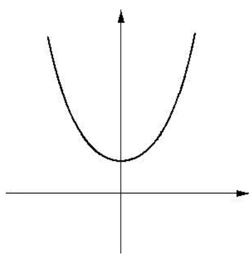
$$128\times\left(\frac{5}{2}\right)^5=12500>1000\ \text{(與假設不合)。}$$

因此 $q=3$，所以阿螺研究的對數螺線公比為 $\frac{3}{2}$。

關於(2)：因為公比為 $\frac{3}{2}$，且首項是 128，所以次 5 項依序為

$$192,288,432,648,972.$$

接下來，談談自然界裡的另一項藝術傑作…懸鍊線：



當你兩手抓住一條線的兩頭，讓中間的線受地心引力而自然下垂。這樣所產生的曲線並不是開口向上的拋物線（這是荷蘭科學家惠更斯在 1646 年時證明的），而是一種稱為『懸鍊線』的曲線。右圖就是一條懸鍊線（長相酷似拋物線吧！），它是由函數

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad (e\doteqdot 2.71828\cdots)$$

所畫出來的圖形。其它的例子：女士們懸掛在脖子上的項鍊，蜘蛛網下垂的形狀，它所產生的曲線也是『懸鍊線』。經常被誤認為拋物線的曲線，除了懸鍊線外，圓或橢圓的一部份，雙曲線的一支也經常被誤認。要如何辨識他們呢？最常用的方法，大概就是使用圓錐曲線的光學性質了！

習題 1 據報載，台北市某市立醫院發生碘 131 的輻射滲漏意外，該滲漏意外發生於 16 天前，經檢舉才於今日被揭發，原能會馬上對院內人員進行全身劑量檢測，結果有一人測出身上有 0.05 毫西弗的輻射劑量。

原能會人員表示，碘 131 的半衰期為 8 天，安全含量是 1 毫西弗以內。試問：被感染人員的碘 131 含量是否超過標準值。

習題 2 設 x, r 是正實數。選出正確的等式：

(A) $4^{\log_2 x} = x^2$；

(B) $\sqrt{2}^{\log_2 x} = \sqrt{x}$；

(C) $2^{\log_4 x} = \sqrt{x}$；

(D) $4^{\log_8 x} = \sqrt[3]{x^2}$；

(E) $x^{\log_2 r} = r^{\log_2 x}$。

習題 3 設函數 $f(x)$ 的定義域為正實數。若對任何正實數 x 恆有

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \text{常數 } r \ \ (0 < r < 1),$$

則稱函數 $f(x)$ 為學習率為 r 的學習函數。請判別下列何者為學習函數，其學習率又為何？

(1) $f(x) = \dfrac{P}{x}$，P 是一個固定的正常數。

(2) $f(x) = \dfrac{P}{x^2}$，P 是一個固定的正常數。

(3) $f(x) = \dfrac{P}{\sqrt{x}}$，$P$ 是一個固定的正常數。

(4) $f(x) = P \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$P$ 是一個固定的正常數。

(5) $f(x)=P\times r^{\log_2 x}$，$P$與$r$是固定的正常數，且$0<r<1$。

習題 4 某電子公司生產一款新型掌上型電腦(PDA)，根據該公司以往的學習曲線知道：這款掌上型電腦量產之後第x個月的每台生產成本$f(x)$（千元）會符合數學模式

$$f(x)=\frac{20}{\sqrt{x}}.$$

廠商為了讓此款掌上型電腦具有競爭力，將量產之後第x個月的每台售價訂為$p(x)=9-\sqrt{x}$（千元）。問：這款掌上型電腦量產之後，哪幾個月會達到損益兩平或賺錢（即當月不虧損）的情況。

習題 5 對「接觸便會感染，而且感染後便能免疫永不再犯」這類傳染病的感染率$I(t)$定義為

$$I(t)=\frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}.$$

根據理論得知，感染率$I(t)$都會符合

$$I(t)=\frac{1}{1+a\cdot 7^{-bt}}$$

這樣的數學模型，而且當$I(t)=\frac{1}{2}$的時間t是該傳染病的傳染高峰。

有一這類型的傳染病在某個城市蔓延，剛開始（即$t=0$時），有 2%的人口被傳染，而$t=3$ 時，有 12.5%的人口被傳染。

(1) 試求感染率$I(t)$中的常數a與b的值。

(2) 當t為何時，是該傳染病的傳染高峰。

(3) 當$t=12$時，該城有多少比例的人口被傳染過該傳染病。

習題 6 五十年前一位獨裁者將部分非法取得的金錢存入瑞士銀行的個人秘密帳戶。當初與銀行簽訂的利率是「每年以 6%複利計算」。求當初存入的一塊錢，如今變成多少錢（小數部分捨去）？

【對數參考值：$\log 1.06 = 0.0253, \log 1.84 = 0.2648, \log 1.85 = 0.2672$】

習題 7　在一個大湖裡種下一株睡蓮，這種睡蓮的特性是每天會生出一株睡蓮，即第一天有 1 株睡蓮，第二天有 2 株睡蓮，第三天有 4 株睡蓮，…。假設湖中的睡蓮都沒有死掉，結果發現在第三十天時，整個湖面都佈滿了睡蓮。問：

(1) 睡蓮只覆蓋湖面的一半時是在第幾天？

(2) 睡蓮在第幾天時，覆蓋湖面剛好超過 3%的面積。

習題 8　一個人喝了少量的酒後，血液中酒精含量將迅速上升到 0.3 mg/cc，在停止喝酒以後，血液中酒精含量就以每小時 50%的速度減少。為了保障交通安全，某地交通規則規定：「駕駛員血液中的酒精含量不得超過 0.0375 mg/cc。」問：若喝了少量酒的駕駛員，至少過多少小時後才能駕駛？

習題 9　從一『黃金螺線』的中心任意的劃出一射線，依序與螺線相交於 $P_1, P_2, \cdots$ 這些點，且他們與中心的距離分別為 $f_1, f_2, \cdots$。證明：恆有 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ 的關係。

習題 10　西元 1999 年的 921 集集大地震與 1022 嘉義大地震分別是芮氏地震規模 7.3 與 6.4 的強震。就釋放能量來說，集集大地震的地震能量是嘉義大地震的幾倍？（取整數部分）？【對數參考值：$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 19 = 1.2787$】

習題 11　伽利略的自由落體運動：「從靜止開始計算，物體經過 t 秒後，在空中下降的距離為 $d = 4.9t^2$ 公尺」。今令 $x = \log_{10} t, y = \log_{10} d$，在座標平面上描繪物體落地之前所對應的座標 (x, y)。

(1) 說明物體落地之前所對應的座標 (x, y) 落在一條直線上。

【對數參考值：$\log_{10}7=0.8451$】

(2) 求這條直線的斜率。

習題 12　克卜勒發現行星離太陽越遠，繞太陽一圈所需的時間越長，即

$$\frac{R^3}{T^2}=K\ (\text{克卜勒常數}),$$

R是行星到太陽的距離，T是繞太陽一圈的時間，這就是有名的克卜勒定律。規定$x=\log_{10}R, y=\log_{10}T$，並將太陽系上的行星所對應的$x,y$值以數對$(x,y)$標在座標平面上。

(1) 證明：這些行星所對應的座標(x,y)落在一直線上。

(2) 求這條直線的斜率。

動手玩數學

義大利耶穌會修士瑞卡堤在 1757 年定義了『雙曲正弦』$\sinh(x)$與『雙曲餘弦』$\cosh(x)$函數為

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

這裡的e是有名的尤拉常數，其值約為$2.71828\cdots$。瑞卡堤發現了如下的等式：

$$\begin{aligned}&\cosh(-x)=\cosh(x),\ \sinh(-x)=-\sinh(x),\\&\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1,\\&\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y),\\&\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

請驗證這些等式的正確性。

參考文獻

[1] 陳太乙譯（亞伯特・賈夸著），《睡蓮方程式》，究竟出版社。

[2] 黃炘強，《數字人生》，台灣商務印書館。

[3] 鄭惟厚譯（毛爾著），《毛起來說e》，天下文化。

[4] 趙文敏，等角螺線及其他，《科學月刊》第二十卷第九期、第十期。

昔日的計算利器……指數與對數的習題解答

習題 1

設被感染人員當時身上有 x 毫西弗的輻射劑量。經過 16 天之後（也就是 2 倍的半衰期）應該殘留

$$x \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x}{4}$$

毫西弗的輻射劑量。因此，

$$\frac{x}{4} = 0.05 \Rightarrow x = 0.2\ (\text{毫西弗})\text{。}$$

因為 $0.2 < 1$，所以該被感染人員沒有超過標準值。

習題 2

答案：(A)(B)(C)(D)(E)。只需將兩邊同時取對數 $\log_2$ 就可以看出相等。

習題 3

(1) 計算

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{\frac{P}{2x}}{\frac{P}{x}} = \frac{1}{2}$$

得到此函數是學習率為 $\frac{1}{2}$ 的學習函數。

(2) 計算

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{\frac{P}{(2x)^2}}{\frac{P}{x^2}} = \frac{1}{4}$$

得到此函數是學習率為$\frac{1}{4}$的學習函數。

(3) 計算

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{\frac{P}{\sqrt{2x}}}{\frac{P}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到此函數是學習率為$\frac{1}{\sqrt{2}}$的學習函數。

(4) 計算

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{P\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}}{P\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}.$$

因為比值不是固定的常數，所以不是學習函數。

(5) 計算

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{P\times r^{\log_2(2x)}}{P\times r^{\log_2 x}}=r,$$

得到此函數是學習率為r的學習函數。

習題 4

依題意得到

$$\begin{aligned}p(x)-f(x)\geq 0 &\Rightarrow (9-\sqrt{x})-\frac{20}{\sqrt{x}}\geq 0\\ &\Rightarrow \sqrt{x}^{2}-9\sqrt{x}+20\leq 0\\ &\Rightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-5)\leq 0\\ &\Rightarrow 4\leq\sqrt{x}\leq 5\\ &\Rightarrow 16\leq x\leq 25.\end{aligned}$$

答案：量產後第 16 個月至第 25 個月可達到損益兩平或賺錢。

習題 5

(1) 由 $I(0)=\dfrac{2}{100}, I(3)=\dfrac{12.5}{100}$ 得到

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a}=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}; \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{a}{7^{3b}}}=\dfrac{12.5}{100}=\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=49; \\ 8=1+\dfrac{49}{7^{3b}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=49; \\ b=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

(2) 由(1)知道

$$I(t)=\frac{1}{1+7^{2-\frac{t}{3}}}.$$

因為 $I(t)=\dfrac{1}{2}$ 時是傳染病的高峰，所以

$$\frac{1}{1+7^{2-\frac{t}{3}}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2=1+7^{2-\frac{t}{3}}$$

$$\Rightarrow 7^0=7^{2-\frac{t}{3}}$$

$$\Rightarrow t=6.$$

(3) 由 $I(t)$ 的公式知道

$$I(12)=\frac{1}{1+7^{2-\frac{12}{3}}}=98\%.$$

習題 6

設當初存入的一塊錢，如今變成 x 塊錢。依複利公式得到

$$x=1\times(1+6\%)^{50}=1.06^{50}.$$

將兩邊取對數得到

$$\log_{10} x = 50\log_{10} 1.06 \doteqdot 1.265=\log_{10}(10\times 1.84\cdots) \Rightarrow x \doteqdot 18.4\cdots.$$

答案：約為 18 元。

習題 7

(1) 因為睡蓮株數成倍數成長，且第 30 天時剛好布滿整個湖面，所以第 29 天時會布滿半個湖面。答案為第 29 天。

(2) 承(1)的推法，第 28 天時會布滿 $\frac{1}{4}=25\%$ 個湖面；第 27 天時會布滿 $\frac{1}{8}=12.5\%$ 個湖面；第 26 天時會布滿 $\frac{1}{16}=6.25\%$ 個湖面；第 25 天時會布滿 $\frac{1}{32}=3.125\%$ 個湖面；第 24 天時會布滿 $\frac{1}{64}=1.5625\%$ 個湖面。答案為第 25 天。

習題 8

設喝少量酒後 n 小時才能駕駛。在 n 小時後，血液中的酒精含量為

$$0.3(1-50\%)^n = 0.3\times 0.5^n \text{ mg/cc}$$ 。

依題意

$$\begin{aligned} 0.3\times 0.5^n \le 0.0375 &\Rightarrow 0.5^n \le 0.125 \\ &\Rightarrow n \le 3. \end{aligned}$$

所以，過 3 小時後才能駕駛。

習題 9

因為是黃金螺線，所以

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}=\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

即

$$f_{n+2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,f_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 f_n.$$

因此

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} + f_n &= \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{2^2}{(1+\sqrt{5})^2} \right) f_{n+2} \\
&= \frac{(2+2\sqrt{5})+4}{6+2\sqrt{5}} f_{n+2} \\
&= f_{n+2},
\end{aligned}
$$

得證。

習題 10

由

$$\log_{10} f(7.3) - \log_{10} f(6.4) = 1.44(7.3-6.4) = 1.296$$

得到

$$\log_{10} \frac{f(7.3)}{f(6.4)} = 1.296.$$

因為 $\log_{10} 19 = 1.2787, \log_{10} 20 = 1.301$ ，所以

$$\frac{f(7.3)}{f(6.4)} = 19.\cdots.$$

答案為 19 倍。

習題 11

(1) 對方程式取對數得到 $\log_{10} d = \log_{10} 4.9 + 2\log_{10} t = 2\log_{10} 7 - 1 + 2\log_{10} t = 0.6902 + 2\log_{10} t$ ，即 $y = 2x + 0.6902$。所以物體落地之前所對應的座標 (x, y) 落在直線 $y = 2x + 0.6902$ 上。

(2) 直線 $y = 2x + 0.6902$ 的斜率為 2。

習題 12

關於(1)：兩邊取對數得到

$$\log_{10}\frac{R^3}{T^2}=\log_{10}K\Rightarrow 3\log_{10}R-2\log_{10}T=\log_{10}K.$$

將 $x=\log_{10}R, y=\log_{10}T$ 代入得到直線方程式

$$3x-2y=\log_{10}K.$$

關於(2)：此直線的斜率為 $\frac{3}{2}$ 。

$\boxed{\text{動手玩數學參考解答}}$

$$\begin{aligned}\cosh(-x)&=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}\\&=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\\&=\cosh(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(-x)&=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}\\&=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2};\\&=-\sinh(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh^2(x)-\sinh^2(x)&=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\times\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\times\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\&=\left(\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}\right)+\left(\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}\right)\\&=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}\\&=\cosh(x+y);\end{aligned}$$

同樣的方法可得到

$$\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y).$$