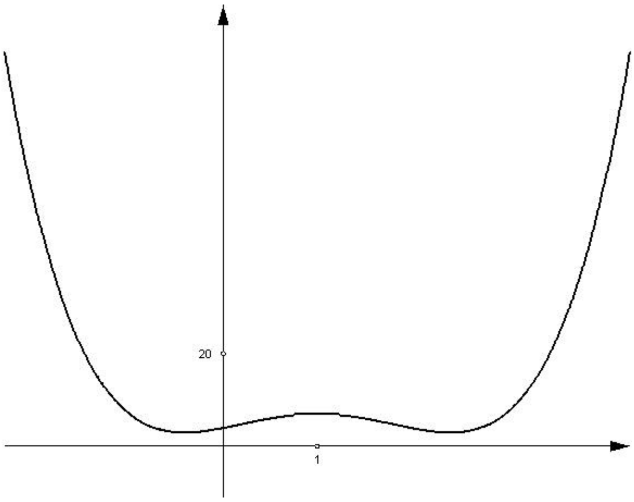
8 代數基礎……多項式與多項函數



$y=x^4-4x^3+2x^2+4x+4$的圖形

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$$
$$\|$$
$$\left(x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)\right)$$
$$\times$$
$$\left(x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)\right)$$

尤拉的智慧[1]

代數運算符號“$+,-,\times,\div$” 傳入中國是清末的事情，多項式一詞更是清末數學家李善蘭中譯的。這說明了「儘管數的世界與多項式的世界同樣都可以做“$+,-,\times,\div$”的運算，也有許多可以類比的公式或理論（如最大公因數（式）、最小公倍數（式）、除法原理、輾轉相除法等），但是欲從具體『數』的世界進入到抽象『代數』的殿堂是多麼的不容易啊」。多項式是代數世界裡較為基本的成員。掌握住它就像擁有了一把入代數學之門的鑰匙一樣。現在就讓我們隨多項式起舞，讓它引領我們一窺代數的神聖與莊嚴。

談到多項式，就讓人聯想到“$x^2,x^3,x^4,x^5,\cdots$”這樣的代數符號。這些上標符號是數學家笛卡爾首先使用，由於好用又易於記憶，如今已成為標準符號了。給定一個多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

當$n=1,2$時，$f(x)$是我們熟悉的一次，二次多項式（或者稱為線性，二次函數）。關於這兩種方程式的根之公式，幾乎人人可以倒背如流。可是，當$n\geq 3$時，多項方程式$f(x)=0$的根，對中學生來說，所知就有限了。然而，石破天驚的一擊也是由笛卡爾所敲響的。笛卡爾證明中學多項式課程裡最初等也是最重要的『因式定理』:「$(x-a)$整除$f(x)$」的充分必要條件為「$f(a)=0$」。有了因式定理之後，整係數多項式的『一次因式檢驗法』:

$$(px-q)\,|\,f(x)\Rightarrow p\,|\,a_n, q\,|\,a_0$$

就容易推導了。笛卡爾之後，求解高次多項方程式 $f(x)=0$ 的根成為熱門的活動，直到 1799 年，高斯證明了『代數基本定理』才為多項式的理論劃下完美的「小」句點。有關『代數基本定理』的證明不下幾十個，高斯就給了四個證明，第四個證明完成於 1849 年。代數基本定理的證明之困難點就在於『一次與二次方程式的根都可以用代數式來表示，而高次多項方程式的根僅能證明存在，卻無法用代數式來描述』。高斯創造的『存在性』之證明可以說是替數學證明方法開創先河，樹立典範。

有關多項方程式的進階理論（完美的「大」句點）需等到修完大學數學系的『代數學』課程之後才能更深入的討論。

[1] 在『代數基本定理』尚未被證明正確之前，萊布尼茲就質疑過「每個實係數多項式都可以分解成一次或者兩次實係數多項式的乘積」的正確性。數學家白努利更舉反例說：「四次多項式 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 就不可能分解成兩個實係數多項式的乘積。」代數大師尤拉在 1742 年時，將白努利的四次多項式分解為上圖中，下方所列的乘積，而此圖中畫的正是函數 $f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 的圖形。尤拉寫過一本名為《代數基礎》的教科書，作為當時學生學習代數的參考用書。拉普拉斯對多產數學家尤拉的評語為：“Read Euler, read Euler, He is the master of us all.”

8.1 整數與整係數多項式

代數，顧名思義，將未知數代之以數，它還是一個數。例如將實係數多項式的未知數“x”換成一個實數之後，那麼多項式就變成一個實數。我們有興趣的情形是：多項式的係數是整數，代入的數也是整數，這時所產生的數亦為整數。將“x”代入適當的數之後，有時是可以更加瞭解多項式的性質。舉一則例題說明：

例題 1　設 a,b 是給定的奇整數。證明：多項方程式

$$x^2+ax+b=0$$

沒有整數根。

【證明】利用反證法，假設整數c是該方程式的一整數根。因此$x-c$是多項式x^2+ax+b的一次因式。由一次因式檢驗法得知：$c\mid b$，所以c為奇數（因為b是奇數）。因為a,b,c都是奇數，所以

$$c^2+ac+b$$

也是奇數，這與

$$c^2+ac+b=0\ (偶數)$$

矛盾。

如果多項式$f(x)$與$x-b$都是整係數多項式，那麼由『多項式除法定理』知道$f(x)=(x-b)g(x)+r$，這裡的$g(x)$與常數r分別是$f(x)$除以$x-b$的商式與餘式。由『綜合除法』知道$g(x)$也是整係數多項式，由『餘式定理』知道$r=f(b)$是一個整數。因此$f(x)=(x-b)g(x)+f(b)$。若a是一個整數，則將$x=a$代入式子中，得到『數』的等式

$$f(a)=(a-b)g(a)+f(b)\Rightarrow f(a)-f(b)=(a-b)g(a).$$

由此得到整係數多項式與數之間的聯繫是：如果a,b是相異的整數，$f(x)$是整係數多項式，那麼

$$(a-b)\mid(f(a)-f(b)).$$

特別應用在整數的情形：當n是正整數時

$$(a-b)\mid\left(a^n-b^n\right) \tag{8.1}$$

當n是正奇數時

$$a-(-b)\mid a^n-(-b)^n \Rightarrow (a+b)\mid\left(a^n+b^n\right) \tag{8.2}$$

例題 2　設n是正整數。證明

$$3^{3n}-2^{2n}$$

恆為 23 的倍數。

【解】因為

$$3^{3n}-2^{2n}=27^n-4^n,$$

所以

$$(27-4)\,|\,3^{3n}-2^{2n},$$

即 23 整除 $3^{3n}-2^{2n}$ 。

〔註〕本問題亦可利用數學歸納法證明。

例題 3 正整數 $2^{100}+1$ 乘開後是一個 302 位數的自然數，而 $2^{104}-1$ 是 303 位數的自然數。試求這兩個數的最大公因數

$$\left(2^{100}+1,2^{104}-1\right)=?$$

【解】如果 d 是 $2^{100}+1$ 與 $2^{104}-1$ 的最大公因數，那麼

$$d\,|\left(2^{100}+1\right)\times 2^4+\left(2^{104}-1\right)\times(-1)\Rightarrow d\,|17$$
$$\Rightarrow d=1 \quad \text{或} \quad 17.$$

由 (8.1) 與 (8.2) 得到

$$\begin{cases}\left(2^8-1\right)|\left(2^8\right)^{13}-1\\ \left(2^4+1\right)|\left(2^4\right)^{25}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\times5\times17\,|\,2^{104}-1\\ 17\,|\,2^{100}+1\end{cases}$$
$$\Rightarrow 17\,|\,2^{104}-1,\ 17\,|\,2^{100}+1.$$

因此最大公因數是 17。

例題 4 擅長解三次方程式的卡當，利用恆等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

研究實數

$$r=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

(1) 請追隨卡當的步法證明：r 是三次方程式

$$x^3+6x-20=0$$

的一實數根。

(2) 求 $r=?$

【解】關於(1)的證明：令 $a=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}, b=\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ 代入恆等式得到

$ab=2, a^3-b^3=20$ 及

$$r^3+6r=20.$$

因此 r 是三次方程式

$$x^3+6x-20=0$$

的一實數根。

關於(2)的證明：利用一次因式檢驗法知道：$x=2$ 是該三次方程式的一根。因式分解得到

$$x^3+6x-20=(x-2)\left(x^2+2x+10\right).$$

因為 $x^2+2x+10=0$ 的判別式 $2^2-4\cdot1\cdot10=-36<0$，所以兩根為複數根。因為 r 是實數，所以 $r=2$。

例題 5 (歐基里德的年齡)歷史學家為了推敲大數學家歐基里德的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳著一則很有趣的故事：那年的某一天，歐基里德造了一個整係數多項式，並興高采烈的跟旁邊的人說「我現在的年紀剛好是這個多項式方程式的一個根」。旁邊的人為了想知道歐基里德的歲數，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐基里德的多項式，分別得到 77 與 85 的值。這時歐基里德笑著說「我的年紀有你代的數那麼小嗎」。你能根據這些對話推得歐基里德出生的年份嗎？

【解】假設歐基里德造的整係數多項式為 $f(x)$ 及那時的年紀為 a 歲，並設旁邊的人所代入較大的數為 L。

根據題意我們有

$$\begin{cases} f(7)=77 \\ f(L)=85 \\ f(a)=0 \\ 7<L<a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-7)\,|\,77 \\ (L-7)\,|\,8=85-77 \\ (a-L)\,|\,85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=8,14,18,84 \\ L=8,9,11,15 \\ (a-L)\,|\,85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=14, \\ L=9. \end{cases}$$

因此當時歐基里德的年紀為 14 歲，所以他出生於西元前 350 年。

8.2 利用整係數多項式製造質數

尤拉在 1772 年時發現：多項函數 $f(x)=x^2+x+41$ 在 $x=0,1,2,\cdots,39$ 時，其函數值都是質數。同一年，他給白努利的信中，提到更多像這樣的例子。例如

(1) x^2+x+2 在 $x=0$；

(2) x^2+x+3 在 $x=0,1$；

(3) x^2+x+5 在 $x=0,1,2,3$；

(4) x^2+x+11 在 $x=0,1,2,\cdots,9$；

(5) x^2+x+17 在 $x=0,1,2,\cdots,15$

時它們都是質數。另外像 $2x^2+11$ 在 $x=0,1,2,\cdots,10$；$36x^2-810x+2753$ 在 $x=0,1,2,\cdots,44$ 時也都是質數。類似這種函數值是質數的多項式被稱為『製造質數的多項式』。事實上，在 1743 年，哥德巴赫證明「對任何整係數的多項式 f，函數值 $f(0), f(1), f(2),\cdots$ 不可能全為質數」。在這裡我們考慮二次的情形，一般情況與二次的證明差不了多少。

定理 8.1 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一個整係數二次多項式。證明：函數值

$$f(0), f(1), f(2), \cdots$$

不可能全為質數。

【證明】假設函數值 $f(0), f(1), f(2), \cdots$ 全為質數。因為它們都是正數，所以 $a>0$（拋物線開口向上）。令 $h=|b|$，質數 $p=f(h)$，那麼 $f(h)<f(h+1)<f(h+2)<\cdots$（因為 $x=h, h+1, h+2, \cdots$ 在拋物線對稱軸的右邊）。將函數值 $f(h+p), f(h)=p$ 相減得到

$$0<f(h+p)-f(h)=((h+p)-h)q,\ (q\geq 1)\Rightarrow f(h+p)=p(1+q),\ (1+q\geq 2).$$

這與 $f(h+p)$ 是質數矛盾。因此 $f(0), f(1), f(2), \cdots$ 不可能全為質數。

8.3 代數基本定理與堪根定理

例題 6　方程式

$$x^4-x^3-3x^2+x+1=0$$

共有幾個實數根。

例題 7　設 a,b,c 是三個相異的實數，化簡多項式

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

【解】設該多項式為 $f(x)$，由給定的形式知道 $f(x)$ 是一個至多兩次的多項式。代入 $x=a,b,c$ 的值得到

$$f(a)=a^2,\ \ f(b)=b^2,\ \ f(c)=c^2.$$

因此 a,b,c 是方程式 $f(x)-x^2=0$ 的三個相異實根。因為 $f(x)-x^2$ 的次數至多 2 次，又有 3 個相異實根，顯然與『代數基本定理』不合，因此 $f(x)-x^2$ 是零多項式，即

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=f(x)=x^2.$$

8.4 比較係數及根與係數的關係

多項式最重要的就是此多項方程式的根，然而根是什麼也反應在多項式的係數上。因此，瞭解「根與係數的關係」是有其必要的，就如同一元二次方程式 $x^2-ax+b=0$ 的兩根之和為 a；兩根之積為 b 一樣。

例題 8　已知實數 a,b 滿足

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+ax+b\right)^2.$$

求 a 與 b 的值。

【解】比較兩邊 x^3 項與常數項的係數得到

$$\begin{cases}6=2a\\1=b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\b=\pm1.\end{cases}$$

現在來確定 $b=1$ 或 $b=-1$。將 $x=-1$ 代入得到

$$1=(1-a+b)^2=(b-2)^2\Rightarrow b=3,1.$$

因此答案為 $a=3,b=1$。

【註】這題的解題過程中用到了「比較係數」及「將未知數代之以數」這兩種基本方法。

例題 9　已知 p,q 是實數，且多項方程式

$$x^3-px^2+11x-q=0$$

的根是三個連續的整數。求 p,q 的值。

【解】設三個連續的整數根為 $n-1,n,n+1$。由根與係數關係知道：

$$\begin{cases}p=3n;\\11=(n-1)n+(n-1)(n+1)+n(n+1)=3n^2-1;\\q=(n-1)n(n+1)=n^3-n.\end{cases}$$

由第二式解得 $n=2,-2$。當 $n=2$ 時，求得 $(p,q)=(6,6)$；當 $n=-2$ 時，求得 $(p,q)=(-6,-6)$。

因此 $(p,q)=(6,6)$ 或 $(-6,-6)$ 。

8.5 邏輯斯蒂函數……渾沌世界裡的多項函數

把多項式視為函數看待時，這函數就稱為多項函數。典型的例子有常數函數、線性函數（一次函數）及二次函數。在這裡，我們要探討一個叫做『邏輯斯蒂函數』的多項函數，邏輯斯蒂函數在渾沌數學與生物數學上扮演著極其重要的角色。所謂的邏輯斯蒂函數就是像

$$L_k(x)=kx(1-x)$$

這樣的二次函數，這裡的 k 是一個介於 1 與 4 之間的常數，而且限制 x 的範圍在 $0<x<1$。就以 $f(x)=3x(1-x)$（$k=3$ 的邏輯斯蒂函數）為例：

例題 10 設邏輯斯蒂函數 $f(x)=3x(1-x)$，且 $g(x)=f(f(x))$ 。

(1) 求 $f(\frac{2}{3})$ 的值。

(2) 求 $g(\frac{2}{3})$ 的值。

(3) 求 $g(x)=x$ 的解 x 。

【解】關於(1)： $f(\frac{2}{3})=3\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ 。

關於(2)： $g(\frac{2}{3})=f(f(\frac{2}{3}))=f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$ 。

關於(3)：由

$$\begin{aligned} x-g(x) &= x-f(3x(1-x)) \\ &= x-3\times 3x(1-x)(1-3x(1-x)) \\ &= 27x^4-54x^3+36x^2-8x \\ &= x(3x-2)^3 \end{aligned}$$

知道 $x=0,\frac{2}{3}$ 是 $g(x)=x$ 的解。

【註】像 $f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}, g(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$ 這種不動如山的解 x 是邏輯斯蒂函數重要的不變量。

例題 11　根據研究，用 x 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上殘留農藥與清洗前的殘留農藥比為函數 $f(x)$，$f(x)$ 可表示為

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

試問：

(1) 用 1 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

(2) 用 $2a(a>0)$ 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

(3) 用 $a(a>0)$ 單位的清水清洗蔬菜後，再一次用 a 單位的清水清洗同樣的蔬菜。求在這兩次清洗之後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

(4) 在(2)與(3)的兩種清洗蔬菜的方法中，哪一種清洗後，蔬菜上殘留的農藥較少？

【解】關於(1)：將 $x=1$ 代入函數 $f(x)$ 得到

$$f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}.$$

關於(2)：將 $x=2a$ 代入函數 $f(x)$ 得到

$$f(2a)=\frac{1}{1+(2a)^2}=\frac{1}{1+4a^2}.$$

關於(3)：將 $x=a$ 代入函數 $f(x)$ 得到

$$\frac{\text{第一次清洗後農藥殘留量}}{\text{蔬菜原農藥殘留量}}=f(a)=\frac{1}{1+a^2};$$
$$\frac{\text{第二次清洗後農藥殘留量}}{\text{第一次清洗後農藥殘留量}}=f(a)=\frac{1}{1+a^2}.$$

將兩比例式相乘得到

$$\frac{\text{第二次清洗後農藥殘留量}}{\text{蔬菜原農藥殘留量}}=\frac{1}{\left(1+a^2\right)^2}.$$

關於(4)：將(2)與(3)的比值相減得到

$$\frac{1}{1+4a^2}-\frac{1}{\left(1+a^2\right)^2}=\frac{a^2\left(a^2-2\right)}{\left(1+4a^2\right)\left(1+a^2\right)^2}.$$

因此，當$a=\sqrt{2}$時，兩種清洗方法具有相同的效果；當$a>\sqrt{2}$時，清洗兩次殘留的農藥量較少；當$0<a<\sqrt{2}$時，一次清洗殘留的農藥量較少。

習題 1　設a為整數。若三次方程式

$$x^3+x^2+ax-1=0$$

在-1與-2之間恰有一實數根，則

(1) 試求整數a的值。

(2) 此三次方程式在哪些連續整數之間還有實數根。

習題 2　化簡

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}-\sqrt[3]{-5+2\sqrt{13}}=?$$

習題 3　求$x^{100}+1$除以x^3+x^2+x的餘式。　（90 年台大數學系申請入學）

習題 4　多項式

$$P(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$$

滿足$P(1)=2,P(2)=3,P(3)=5$。試問：可以找到整係數多項式$Q(x)$滿足$Q(1)=2,Q(2)=3,Q(3)=5$嗎？

習題 5　已知多項式

$$x^3+ax^2+bx+c$$

的係數是整數，且$ac+bc$為奇數。證明：這個多項式不能分解成兩個整係數多

項式（次數至少一次）的乘積。

習題 6　若 $f(x)$ 是一個多項式，a,b 是兩個不同的數，$x-a$ 除 $f(x)$ 的餘數 r_1，$x-b$ 除 $f(x)$ 的餘數 r_2，則 $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ 所得的餘式為何？（以 a,b,r_1,r_2 表示）

習題 7　如果 a,b,c 是實數，且三次方程式

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

的三根都是實數根。試證明：二次方程式

$$3x^2-2ax+b=0$$

的兩根也都是實數根。

代數基礎……多項式與多項函數的習題解答

習題 1

設

$$f(x)=x^3+x^2+ax-1.$$

關於(1)：利用堪根定理得到

$$\begin{aligned} f(-1)f(-2)<0 &\Rightarrow (a+1)\left(a+\frac{5}{2}\right)<0 \\ &\Rightarrow -\frac{5}{2}<a<-1 \\ &\Rightarrow a=-2 \text{ (因為} a \text{是整數)。} \end{aligned}$$

關於(2)：由 $f(2)=7,\ f(1)=-1,\ f(0)=-1,\ f(-1)=1,\ f(-2)=-1$ 知道：方程式的三個根剛好在整數 $2,1;0,-1;-1,-2$ 之間。

習題 2

設化簡的式子為 x。利用

$$(A-B)^3=A^3-B^3-3AB(A-B)$$

得到

$$x^3=10-9x.$$

$x=1$是該方程式的一實數根，且

$$x^3+9x-10=(x-1)\left(x^2+x+10\right).$$

因為 $x^2+x+10=0$ 沒有實數根，所以

$$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}-\sqrt[3]{-5+2\sqrt{13}}=1.$$

習題 3

設

$$x^{100}+1=x\left(x^2+x+1\right)q(x)+ax^2+bx+c.$$

將 $x=0$ 代入上式得到 $1=c$。再將

$$x=w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\ \text{(註：}w^2+w+1=0\text{)}$$

代入上式得到

$$\begin{aligned} w+1=a(-w-1)+bw+1 &\Rightarrow (a-b+1)w+a=0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-b+1=0 \\ a=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=0; \\ b=1. \end{cases} \end{aligned}$$

所以餘式為 $x+1$。

習題 4

由式子

$$3=5-2=Q(3)-Q(1)=(3-1)R=2R,\ (\ R\ \text{為整數})$$

知道：整係數多項式 $Q(x)$ 是不存在的。

習題 5

利用反證法，假設

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

可以分解，那麼必有一次因數 $x+d$。由一次因數檢驗法得到：$d\,|\,c$。現在令

$$f(x)=(x+d)g(x).$$

因為 $(a+b)c$ 為奇數，所以 $(a+b),c$ 都是奇數，d 也是奇數。將 $x=1$ 代入上方程式得：$f(1)=(1+d)g(1)$。因為 $1+d$ 是偶數，所以 $f(1)=1+a+b+c$ 也是偶數。這與 $a+b,c$ 是

奇數矛盾。

習題 6

設$(x-a)(x-b)$除$f(x)$的餘式為$px+q$。利用餘數定理知道「$x-a$除$f(x)$的餘數$pa+q$，$x-b$除$f(x)$的餘數$pb+q$」。再與已知「$x-a$除$f(x)$的餘數r_1，$x-b$除$f(x)$的餘數r_2」配合得到

$$\begin{cases} pa+q=r_1 \\ pb+q=r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{r_1-r_2}{a-b}; \\ q=\dfrac{ar_2-br_1}{a-b}. \end{cases}$$

因此$(x-a)(x-b)$除$f(x)$餘式為

$$\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{ar_2-br_1}{a-b}.$$

習題 7

設α,β,γ是三次方程式的三實數根。由根與係數的關係知道：

$$\begin{cases} a=\alpha+\beta+\gamma, \\ b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \\ c=\alpha\beta\gamma. \end{cases}$$

二次方程式

$$3x^2-2ax+b=0$$

的判別式為

$$\begin{aligned}(-2a)^2-4\cdot 3\cdot b &= (-2(\alpha+\beta+\gamma))^2-12(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right) \\ &= 2\left(\alpha-\beta\right)^2+2\left(\beta-\gamma\right)^2+2\left(\gamma-\alpha\right)^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

因為判別式≥ 0，所以二次方程式的兩根為實數根。